

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Katedra pružnosti a pevnosti

**Výpočet protivýbuchového zařízení**  
**Calculation of Anti-Explosive Device**

Student:

Bc. Radomír Bělík

Vedoucí diplomové práce:

Ing. Martin Fusek, Ph.D.

Ostrava 2013

## Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Radomír Bělík**  
Studijní program: N2301 Strojní inženýrství  
Studijní obor: 3901T003 Aplikovaná mechanika  
Téma: **Výpočet protivýbuchového zařízení**  
**Calculation of Anti-Explosive Device**

Zásady pro vypracování:

1. Rozpracujte teorii potřebnou pro řešení (rychlé děje, plasticita, vliv rychlosti, atd.)
2. Sestavte potřebný soubor dat nutných pro řešení.
3. Proveďte potřebné analytické a numerické výpočty.
4. Ověřte výsledky s dostupnými údaji.

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] Jones, N.: Structural Impact, Cambridge University Press, 2003, ISBN 0 - 521 - 30180 - 7.
- [2] Němec, J., Dvořák, J., Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojírenství, Technický průvodce 69, SNTL, Brno, 1989.
- [3] Bittnar, Z., Šejnoha, J.: Numerické metody mechaniky 1, Vydavatelství CVUT, Praha, 1992.
- [4] Lenert, J.: Úvod do metody konečných prvků, VŠB – TU Ostrava, 1999, ISBN 80 – 7078 – 686 – 8
- [5] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L.: The Finite Element Method (Volume 1 - 3), Butterworth-Heinemann, Oxford 2000, ISBN 0-7506-5049-4
- [6] Macura, P.: Experimentální metody v pružnosti a plasticitě, VŠB – TU Ostrava, 2001, ISBN 80-7078-934-4
- [7] Brepta, R.: Rázy a vlny v pevných tělesech, ČVUT v Praze, Praha, 1971.
- [8] Henrych, J.: Dynamika výbuchu a její užití, Academia, Praha, 1973.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

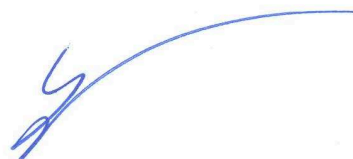
Vedoucí diplomové práce: **Ing. Martin Fusek, Ph.D.**

Datum zadání: 14. 12. 2012

Datum odevzdání: 20. 5. 2013



doc. Ing. Radim Halama, Ph.D.  
vedoucí katedry



doc. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.  
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a uvedl všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě ..20.5.2013.....


.....Radomír Bělík.....

Radomír Bělík

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na moji diplomovou (bakalářskou) práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě diplomovou (bakalářskou) práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že diplomová (bakalářská) práce bude v elektronické podobě uložena v Ústřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové (bakalářské) práce. Souhlasím s tím, že údaje o kvalifikační práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – diplomovou (bakalářskou) práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- beru na vědomí, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě ..20.8.2013.....

.....

podpis

Jméno a příjmení autora práce: Bc. Radomír Bělík

Adresa trvalého pobytu autora práce: Lískovecká 295, Frýdek-Místek

## ANOTACE DIPLOMOVÉ PRÁCE

Bc. BĚLÍK, R. *Výpočet protivýbuchového zařízení: Diplomová práce.* Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra pružnosti a pevnosti, 2013, 72 s. Vedoucí práce: Ing. Martin Fusek, Ph.D.

Diplomová práce se zabývá kontrolním výpočtem zkušebního zařízení, sloužícího pro kontrolu tlakových lahví. V úvodní části práce je probrána teorie výbuchu a jeho chování v okolním prostředí, ráz těles a plastické chování materiálu. Další kapitola popisuje vliv rychlosti deformace z hlediska chování materiálu. Věnována je také pozornost implicitním a explicitním algoritmům výpočtu metody konečných prvků. Vlastní řešení úlohy je provedeno v programech MSC Patran 2012 a MSC Dytran 2012. Úloha je řešena kombinovaným výpočtem, pro určení dynamiky plynu a jeho následném vlivu na konstrukci zkušebního zařízení.

## ANNOTATION OF MASTER THESIS

Bc. BĚLÍK, R. *Calculation of Anti-Explosive Device: Master thesis.* Ostrava: VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Elasticity and Strength, 2013, 72 p. Thesis head: Ing. Martin Fusek, Ph.D.

Master thesis is dealing with calculation of anti-explosive device which is used for testing pressure vessels. In the introduction describes theory of explosion and behavior in the environment, structural impact and plastic material behavior. Next chapter describes influence of strain rate in terms of material behavior. Attention is also given to the implicit and explicit algorithms for finite element method. Analysis is performed by MSC Patran 2012 and MSC Dytran 2012. The problem is solved as a fluid structure interaction analysis.

## Obsah

Obsah.....	6
Seznam použitých značek a symbolů.....	8
1. Úvod.....	11
2. Výbuch .....	12
2.1. Definice výbuchu .....	12
2.2. Rozdělení problému výbuchu .....	13
2.2.1. Vnitřní problém.....	13
2.2.2. Vnější problém .....	16
2.3. Teorie výbuchu ve vzduchu .....	17
2.4. Teorie výbuchu ve vodě.....	18
2.5. Druhy vln napětí .....	19
2.5.1. Rozdělení napěťových vln z pohledu druhu napětí.....	19
2.5.2. Rozdělení napěťových vln z pohledu velikosti napětí .....	20
2.5.3. Povrchová vlna.....	23
3. Rázy.....	24
3.1. Stereostatická teorie rázu - Newtonova metoda .....	24
3.1.1. Centrální přímý ráz koulí .....	25
3.1.2. Koeficient restituce - $r$ .....	28
3.2. Hertzova teorie.....	28
3.3. Vlnová teorie rázu.....	31
3.3.1. Šíření podélné napěťové vlny v prismatické tyči.....	32
4. Plasticita .....	34
4.1. Ramberg-Osgoodův materiálový model .....	36
4.2. Zpevnění materiálu .....	38
4.2.1. Isotropní zpevnění .....	38
4.2.2. Kinematické zpevnění .....	39
4.2.3. Kombinované zpevnění.....	39

5.	Rychlé děje z hlediska materiálu.....	40
5.1.	Materiálové modely .....	41
5.1.1.	Cowper - Symondsův materiálový model.....	42
5.1.2.	Johnson - Cookův materiálový model.....	43
5.1.3.	Zerilli - Armstrongův materiálový model .....	43
6.	Metoda konečných prvků .....	44
6.1.	Implicitní algoritmus.....	44
6.2.	Explicitní algoritmus.....	45
6.3.	Hourglass effect .....	47
6.4.	Porovnání implicitního a explicitního algoritmu .....	49
7.	Vlastní řešení.....	50
7.1.	Popis modelu.....	50
7.2.	Výpočtový model.....	51
7.3.	Materiálové modely .....	53
7.3.1.	Korozivzdorná ocel 1.4301 .....	53
7.3.2.	Model prostředí .....	54
7.3.3.	Model výbušniny.....	54
7.4.	Zkušební úloha.....	55
7.5.	Okrajové a počáteční podmínky .....	57
7.6.	Výsledky .....	58
8.	Závěr .....	64
	Přehled použité literatury .....	66
	Seznam obrázků .....	68
	Přílohy .....	70
	Poděkování .....	72

## Seznam použitých značek a symbolů

### Velká písmena latinské abecedy

<u>Značka</u>	<u>Jednotka</u>	<u>Popis veličina</u>
$A$	$[mm^2]$	Průřez tyče
$[C]$	$[N \cdot s \cdot mm^{-1}]$	Matice tlumení
$C_1$	$[-]$	Integrační konstanta
$C, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$	$[-]$	Konstanty
$D$	$[s^{-1}]$	Cowper - Symondsová konstanta
$E, E_0, E_1, E_2$	$[MPa]$	Modul pružnosti v tahu
$E_{0,2}$	$[MPa]$	Modul pružnosti v tahu při mezi kluzu
$E_n, E_{k1}, E_{k2}, \Delta E_k$	$[J]$	Vnitřní energie
$F$	$[N]$	Síla
$F_{max}$	$[N]$	Maximální rázová síla
$\{F^{ext}\}_{n+1}$	$[N]$	Vektor zatěžujících vnějších sil v kroku $n + 1$
$\{F^{residual}\}_{n+1}$	$[N]$	Vektor rozdílů vnějších a vnitřních sil
$[K]$	$[N \cdot mm^{-1}]$	Matice tuhosti
$L$	$[mm]$	Délka hrany nejmenšího elementu
$[M], [\hat{M}]$	$[kg]$	Matice hmotnosti
$\{Q\}_{n+1}$	$[mm]$	Vektor odhadů posunutí v kroku $n + 1$
$\{\dot{Q}\}_{n+1}$	$[mm/s]$	Vektor odhadů rychlostí v kroku $n + 1$
$\{\ddot{Q}\}_{n+1}$	$[mm/s^2]$	Vektor odhadů zrychlení v kroku $n + 1$
$R$	$[mm]$	Poloměr
$R$	$[J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}]$	Plynová konstanta
$R_D$	$[mm]$	Poloměr detonační vlny
$R_{vp}$	$[mm]$	Poloměr výbuchových plynů
$R_\phi$	$[mm]$	Poloměr stlačeného prostředí
$T$	$[^\circ K]$	Teplota
$T_H$	$[^\circ K]$	Homologační teplota
$M$	$[-]$	Koeficient
$N$	$[m/s]$	Rychlost vlny
	$[-]$	Koeficient
$V$	$[m^3]$	Objem



### Malá písmena latinské abecedy

<u>Značka</u>	<u>Jednotka</u>	<u>Popis veličina</u>
$c_v$	$[J \cdot kg^{-1} \cdot mol^{-1}]$	Měrné teplo při konstantním objemu
$c_z$	$[m/s]$	Rychlost zvuku v prostředí
$e$	$[-]$	Koeficient
$m$	$[-]$	Parametr
$m_1, m_2$	$[kg]$	Hmotnost tělesa
$n$	$[-]$	Parametr
$p$	$[MPa]$	Tlak
	$[-]$	Plastická deformace
$p_{vp}$	$[MPa]$	Tlak výbuchových plynů,
$p_{pr}$	$[MPa]$	Tlak prostředí
$p_\phi$	$[MPa]$	tlak stlačeného prostředí
$q$	$[-]$	Cowper - Symondsová konstanta
$r$	$[-]$	Koeficient restituce
$t$	$[s]$	Čas
$t_c$	$[s]$	Celkový čas rázu
$t_w$	$[s]$	Čas zažehnutí výbušniny
$u$	$[m/s]$	Hmotová rychlost
$u_{vp}$	$[m/s]$	Hmotová rychlost výbuchových plynů
$u_{pr}$	$[m/s]$	Hmotová rychlost prostředí
$v_s$	$[m/s]$	Společná rychlost těles během rázu
$v_{10}, v_{20}$	$[m/s]$	Rychlost těles pře rázem
$v_{11}, v_{22}$	$[m/s]$	Rychlost těles po rázu
$x$	$[m]$	Dráha
$x_{max}$	$[m]$	Maximální stlačení těles
$\dot{x}$	$[m/s]$	Rychlost
$\ddot{x}, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2$	$[m/s^2]$	Zrychlení

### Písmena řecké abecedy

<u>Značka</u>	<u>Jednotka</u>	<u>Popis veličina</u>
$\alpha$	$[m^{\frac{1}{3}} \cdot s^{\frac{4}{3}} \cdot kg^{\frac{-2}{3}}]$	Koeficient
$\beta$	$[-]$	Koeficient
$\gamma$	$[-]$	Koeficient
$\Delta t$	$[s]$	Časový krok
$\Delta t_{crit}$	$[s]$	Kritická délka časového kroku
$\Delta x$	$[m]$	Přírůstek dráhy
$\varepsilon$	$[-]$	Deformace
$\varepsilon_{0,2}$	$[-]$	Deformace při mezi kluzu
$\varepsilon_u$	$[-]$	Deformace při přetržení vzorku
$\varepsilon_{eff}^p$	$[-]$	Efektivní plastická deformace
$\bar{\varepsilon}$	$[-]$	Plastická deformace
$\overline{\varepsilon_{up}}$	$[-]$	Plastická deformace při přetržení
$\dot{\varepsilon}$	$[s^{-1}]$	Rychlost deformace
$\theta$	$[-]$	Objemová deformace
$\mu_1, \mu_2$	$[-]$	Poissonova konstanta
$\rho$	$[kg \cdot m^3]$	Hustota
$\rho_{pr}$	$[kg \cdot m^3]$	Hustota prostředí
$\rho_{vp}$	$[kg \cdot m^3]$	Hustota výbuchových plynů
$\rho_w$	$[kg \cdot m^3]$	Hustota výbušniny
$\rho_\phi$	$[kg \cdot m^3]$	Hustota stlačeného prostředí
$\sigma$	$[MPa]$	Napětí
$\bar{\sigma}$	$[MPa]$	Napětí v plastické oblasti
$\sigma_0$	$[MPa]$	Statické napětí
$\sigma'_0$	$[MPa]$	Dynamické napětí
$\sigma_{0,01}$	$[MPa]$	Mez úměrnosti
$\sigma_p, \sigma_{0,2}$	$[MPa]$	Mez kluzu
$\sigma_u$	$[MPa]$	Napětí při přetržení vzorku

## 1. Úvod

Se zrychlujícím se rozvojem vědy a techniky, lidstvo stále častěji k využívá energie výbuchu. Příkladem mohou být zemní práce, těžba kamene, uhlí a rud, demolice, zbraně, ale také například tváření či svařování. Výbuch však může mít mnoho podob a ať už se jedná o proces řízený či náhodný a nežádoucí, je třeba mít na paměti, že s výbuchem je spojeno prudké uvolnění energie. Proto jsou navrhovány zařízení, které lidem slouží pro ochranu před tímto jevem a jeho negativními účinky. Tyto zařízení v podobě podzemních staveb, ochranných krytů či konstrukcí rozličných tvarů a velikostí, jsou vystaveny vlivem výbuchu velkému zatížení, při kterém nesmí dojít k selhání jejich hlavní funkce, tedy ochraně lidí.

Předmětem této práce je výpočet proti výbuchového zařízení, které má ochránit obsluhu při kontrolování tlakových láhví u nichž může dojít k roztržení.

Text této práce je rozdělen na dvě základní části, teoretickou a praktickou. V teoretické části bude probrána problematika výbuchu v závislosti na formulaci úlohy, působení výbuchu na okolní prostředí a rozdělení vzniklých vln. Bude také popsána teorie rázu těles, plastické chování materiálu a vliv rychlosti zatížení na jeho chování. Pozornost věnujeme také metodě konečných prvků a to z pohledu výpočtových algoritmů.

Praktická část bude věnována vlastnímu řešení daného problému, tedy výpočtu zkušebního zařízení na tlakové láhve. Výpočet bude řešen již zmíněnou metodou konečných prvků s použitím explicitního algoritmu.

Cílem práce je zjistit, zda dané zařízení vydrží zatížení, které vznikne vlivem roztržení tlakové láhve a zda-li bude nadále plnit svou funkci.

## 2. Výbuch

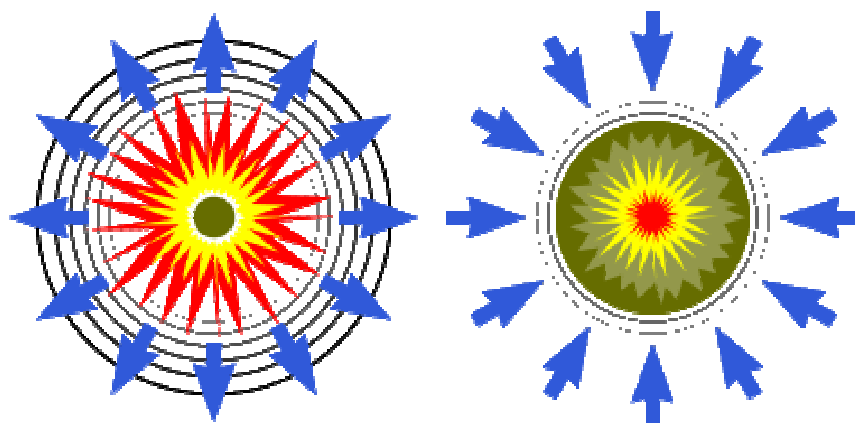
### 2.1. Definice výbuchu

Výbuch nebo-li exploze, lze charakterizovat, jako rychlou změnu fyzikálního nebo chemického stavu hmoty. Při výbuchu dochází společně s pohybem k rychlému uvolnění energie, čímž dochází ke prudké změně tlaku. Tato rychlá změna tlaku, se projeví vznikem rázové vlny. Pojem "rychlé uvolnění" je relativní, jelikož jiná bude rychlost uvolnění energie u chemické nálože a jiná při výbuchu hvězdy ve vesmíru.

Výbuch může mít mnoho podob:

- **Výbuch chemické nálože** - vzniká při prudkém rozkladu chemických sloučenin, při zapálení hořlavých plynů, aj.
- **Nukleární výbuch** - nastává při nekontrolovaném štěpení atomových jader prvků.
- **Termonukleární výbuch** - důsledek slučování jednotlivých jader lehkých prvků, čímž vznikají jádra těžší, důsledkem je explozivní uvolnění energie.
- **Výbuch mechanický** - při destrukci materiálu vlivem vysokého tlaku (např. výbuch parního kotle, tlakové láhve, apod.).
- **Elektrický výbuch** - vzniká při přeskoce výboje mezi místy s velkým rozdílem potenciálu.
- **Sopečný výbuch** - prudké uvolnění energie (v podobě magmatu) akumulované v zemské kůře, vlivem pohybu litosférický desek.
- **Výbuch supernovy** - vzniká zhroucením těžších prvků uvnitř hvězdy.
- **Výbuch při dopadu meteoritu** - prudké uvolnění energie při dopadu meteoritu.
- a mnoho dalších.

Opakem exploze (výbuchu) je jev, známy jako imploze. Při implozi dochází k zhroucení tělesa či hmoty do vlastního objemu, vlivem okolního přetlaku a jeho následnému prudkému vyrovnání. Implozi lze pozorovat například, je-li uzavřená nádoba s vodní párou prudce ochlazená. Ochlazením dojde k prudkému smrštění plynu a uvnitř nádoby nastane podtlak. Bude-li podtlak větší, než dovoluje konfigurace nádoby, dojde k zborcení nádoby zborcení do sebe, tedy implozi.



Obrázek 2.1 - Exploze (vlevo) a Imploze (vpravo)

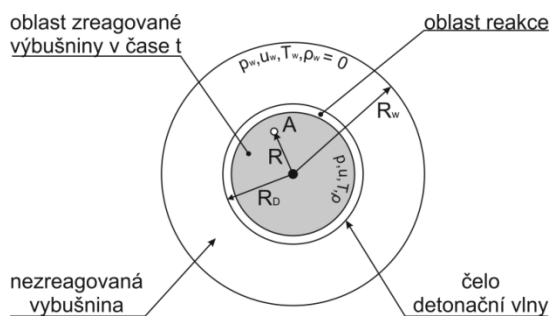
## 2.2. Rozdělení problému výbuchu

Jev výbuchu (budeme se zabývat pouze chemickým výbuchem), lze dle [1.] rozdělit na několik druhů problému:

- **Vnitřní problém** - vyšetřují se procesy uvnitř látky uvolňující energii (výbušniny)
- **Vnější problém** - vyšetřují se procesy v látce obklopující výbušninu
- **Smíšený problém** - zkoumá procesy jako vnější problém, ale v prostředí aktivním k výbuchu
- **Okrajový problém** - vyšetřuje otázky interakce výbuchových vln s tělesy

### 2.2.1. Vnitřní problém

Pro rozbor vnitřního problému, je uvažována sférická nálož s počátkem výbuchu v  $R = 0$  v čase  $t = 0$ . Oblast nálože je rozdělena na dvě hlavní oblasti (obrázek 2.2) a to oblast zreagované výbušniny a oblast, kde k reakci výbušniny ještě nedošlo. Tyto jsou od sebe odděleny malou oblastí chemické reakce, na jejímž vnějším okraji se nachází čelo detonační vlny. Detonační vlna je současně také rázovou vlnou, na její čele se hodnoty jednotlivých veličin mění skokem.



Obrázek 2.2 - Sférická nálož, rozložení při oblastí při vnitřním problému

Řešení chemického výbuchu je popsáno soustavou šesti rovnic:

**Zákon zachování hmoty** - rozdíl mezi vtékající a vytékající hmotou musí být roven nule

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \rho}{\partial R} + \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{\partial \rho}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial R} = 0, \quad (2.1)$$

kde

$\rho$	hustota,
$u$	hmotová rychlost,
$R$	poloměr,
$F$	síla.

**Zákon zachování hybnosti** - změna hybnosti prvku vybuchující hmoty je rovna impulsu působících tlaků.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial R} = 0, \quad (2.2)$$

kde

$p$	tlak.
-----	-------

**Zákon zachování energie** - přírůstek tepla je roven přírůstku vnitřní energie a práce změny objemu.

$$T \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{dE}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \cdot \frac{d\rho}{dt}, \quad (2.3)$$

kde

$T$	teplota,
$t$	čas.

**Stavová rovnice prostředí** - v případě vzduchu má tvar

$$\frac{p}{\rho \cdot R \cdot T} = 1, \quad (2.4)$$

kde

$R$  plynová konstanta,

### Rovnice vnitřní energie

$$E_n = c_v \cdot T - \int_{\rho_w}^{\rho} \left[ T \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\rho} - p \right] \frac{d\rho}{\rho^2}, \quad (2.5)$$

kde

$E_n$  vnitřní energie,

$c_v$  měrné teplo při konstantním objemu,

$\rho_w$  hustota výbušniny.

### Doplňující rovnice - vyjadřující pracovní hypotézu

$$\Phi(p, \rho, u, T, R, t) = 0 \quad (2.6)$$

Nezbytnou součástí řešení jsou také **okrajové podmínky** v místě detonace a na okraji detonační vlny

$$u(0, t) = 0, \quad (2.8)$$

$$p(R_D, t) = 0, \quad \rho(R_D, t) = 0, \quad u(R_D, t) = 0, \quad (2.7)$$

kde

$R_D$  poloměr detonační vlny.

### 2.2.2. Vnější problém

Zabýváme-li se vnějším problémem, předpokládáme, že nálož je plně zreagovaná, zažehnutá a to v relativně krátké době. Můžeme tedy uvažovat čas zažehnutí  $t_w = 0$ . Výbuch pak lze pokládat za okamžitý. Oblasti výbuchu lze rozdělit dvě části (obrázek 2.3), oblast výbuchových plynů a oblast stlačeného prostředí.

Chování v oblasti výbuchových plynů je popsáno stejnými rovnicemi jako při vnitřním problému. Oblast rázové vlny je taktéž popsána stejnými rovnicemi, ovšem rovnice prostředí se bude lišit, přičemž bude závislá na prostředí, v němž k výbuchu dochází. Rozdílná může být i pracovní hypotéza.



Obrázek 2.3 - Sférická nálož, rozložení při oblastí při vnějším problému

Při řešení vnějšího problému, je třeba pracovat s jinými okrajovými podmínkami

$$u(0, t) = 0,$$

$$p_{vp}(R_{vp}, t) = p_{pr}(R_{vp}, t) = p_{vp}^*, \quad (2.9)$$

$$u_{vp}(R_{vp}, t) = u_{pr}(R_{vp}, t) = u_{vp}^*, \quad (2.10)$$

$$\rho_{vp}(R_{vp}, t) \neq \rho_{pr}(R_{vp}, t), \quad (2.11)$$

$$p(R_\phi, t) = p_\phi, \quad \rho(R_\phi, t) = \rho_\phi, \quad u(R_\phi, t) = u_\phi, \quad (2.12)$$

kde

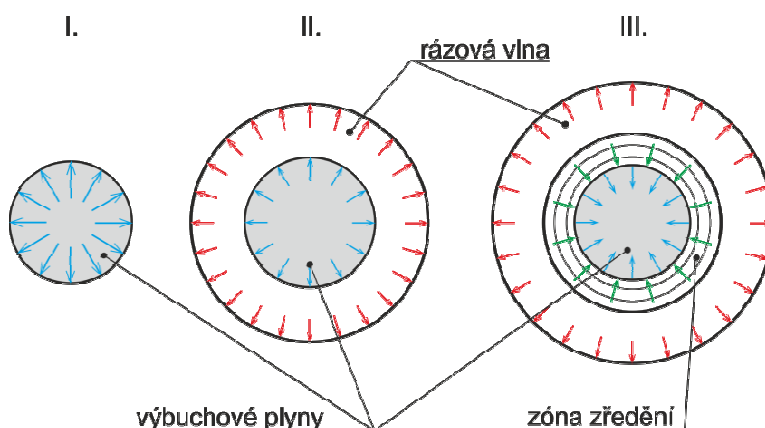
$p_{vp}$	tlak výbuchových plynů,
$\rho_{vp}$	hustota výbuchových plynů,
$R_{vp}$	poloměr výbuchových plynů,



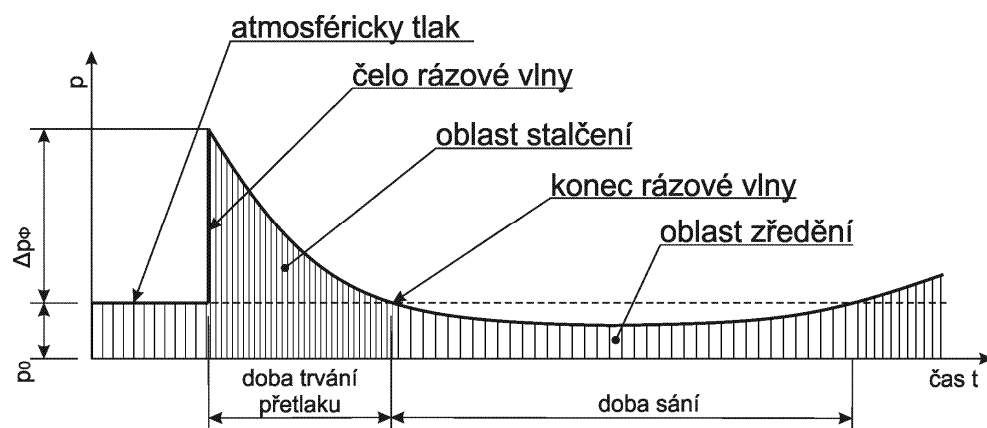
$u_{vp}$	hmotová rychlost výbuchových plynů,
$p_{pr}$	tlak prostředí,
$\rho_{pr}$	hustota prostředí,
$u_{pr}$	hmotová rychlost prostředí,
$p_{\phi}$	tlak stlačeného prostředí,
$\rho_{\phi}$	hustota stlačeného prostředí,
$R_{\phi}$	poloměr stlačeného prostředí,
$u_{\phi}$	hmotová rychlost stlačeného prostředí.

### 2.3. Teorie výbuchu ve vzduchu

Při reakci a výbuchu chemické nálože, se celá sloučenina přemění na výbuchové plyny o vysokém tlaku ( $98\,066 \div 294\,200\text{ MPa}$ ) a teplotě ( $3,5 \cdot 10^3 \div 4 \cdot 10^3\text{ °K}$ ). Plyny se začnou prudce rozpínat a začnou vytlačovat okolní vzduch, díky čemuž dojde k vytvoření vrstvy stlačeného vzduchu, nazývané výbuchová vlna. Postupně začne docházet k poklesu tlaku výbuchových plynů, až na hranici atmosférického tlaku. V této chvíli přestanou výbuchové plyny před sebou tlačit výbuchovou vlnu, která se odtrhne a nadále se šíří samostatně. Díky setrvačnosti se výbuchové plyny pohybují stále vpřed, díky čemuž klesá jejich tlak pod hranici atmosférického tlaku a začne docházet k podtlaku. Nadále se za výbuchovou vlnou tlačí vlna zředění. Vyšší okolní tlak postupně dorovná podtlak ve vlně zředění, čímž dojde k zastavení částic výbuchových plynů a následnému zpětnému pohybu, tlak začne postupně narůstat až přesáhne hranici atmosférického tlaku. Tímto dojde k vytvoření podmínek pro další rozpínání výbuchových plynů a celý proces se začne opakovat.



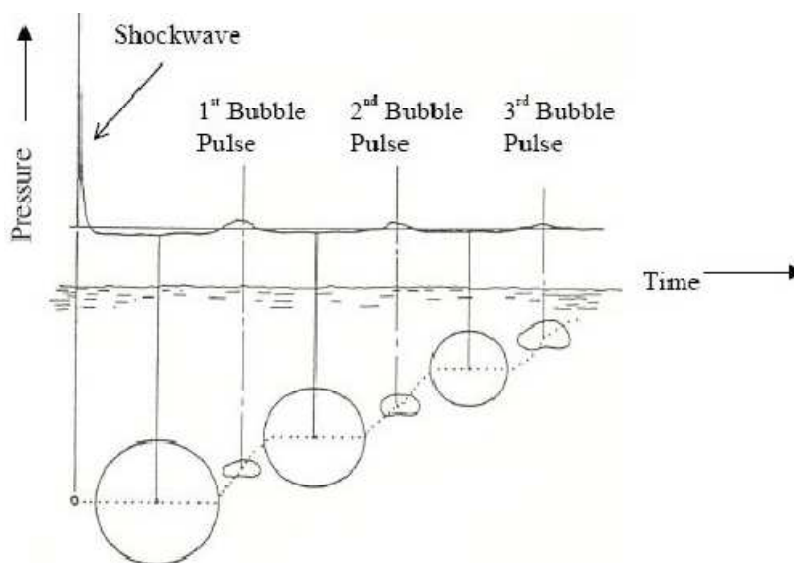
Obrázek 2.4 - Jednotlivé etapy při chemickém výbuchu



Obrázek 2.5 - Graf jednotlivých etap výbuchu

## 2.4. Teorie výbuchu ve vodě

Pro výbuch ve vodě lze uvažovat stejnou analogii jako v případě výbuchu ve vzduchu (kapitola 2.3), avšak s jednou odlišností. Díky vyššímu hydrostatickému tlaku a hmotnosti vody, hlavně ve větších hloubkách jsou částice výbuchových plynů prudce stlačovány okolím. Díky setrvačnosti okolního prostředí (vody) jsou plyny stlačovány až do převýšení hydrostatického tlaku kapaliny. Dochází k druhotné expanzi výbuchových plynů, které jsou opět stlačovány okolním prostředím a celý proces se opakuje, přičemž koule výbuchových plynů stoupá k hladině (obrázek 2.6). Hodnoty přetlaku u druhotných výbuchů dosahují 5 - 20% maximálního přetlaku prvotní rázové vlny. Průběh nárůstu přetlaku u druhotných vln je pozvolný, maximální hodnoty přetlaku je dosaženo v průběhu expanze, na rozdíl od prvotní vlny, kde dochází ke skokové změně hned v počátku výbuchu.



Obrázek 2.6 - Pulsování výbuchových plynů pod vodní hladinou

## 2.5. Druhy vln napětí

Základem výbuchových procesů, které probíhají v náložích a obklopujících prostředích, jsou tzv. napěťové vlny. Ty se šíří kapalným, plynným i pevným prostředím, kde jsou výbuchové vlny ve stavu vysokého tlaku, teploty, hustoty atp. Při zkoumání účinků výbuchu, má teorie vln napětí hlavní význam a je nástrojem zkoumání.

Vlna napětí nacházející se v libovolném prostředí, ať už omezeném či neomezeném, je definována jako část prostředí, které se nachází v přechodovém stavu a stavu napětí. Čelo napěťové vlny tvoří rozhraní mezi oblastí ve stavu napětí a okolním prostředím.

Stejně jako v případě pružnosti a pevnosti, je každé napětí je způsobeno deformací, proto lze konstatovat, že vlny napětí jsou zároveň vlnami deformace. Intenzivní vlny mají značnou "hmotovou rychlost", což je rychlost pohybu jednotlivých částic hmoty ve vlně. U napěťových vln můžou nastat také speciální případy:

- **Čistá vlna napětí** - tuto vlnu nedoprovází pohyb jednotlivých částic a nastává v místě srážky dvou stejně velkých (z hlediska napětí) protichůdných vln.
- **Čistá vlna posuvů** - tuto vlnu nedoprovází napětí a nastává v případě stejného pohybu všech bodů prostředí.

Rychlost pohybu částic v prostředí lze dále rozdělit dle závislosti na čase:

- **Stacionární** - rychlost pohybu částic není závislá na čase
- **Nestacionární** - rychlost pohybu částic je závislá na čase

Napěťové vlny lze dělit dle dalších kritérií, které budou popsány níže.

### 2.5.1. Rozdělení napěťových vln z pohledu druhu napětí

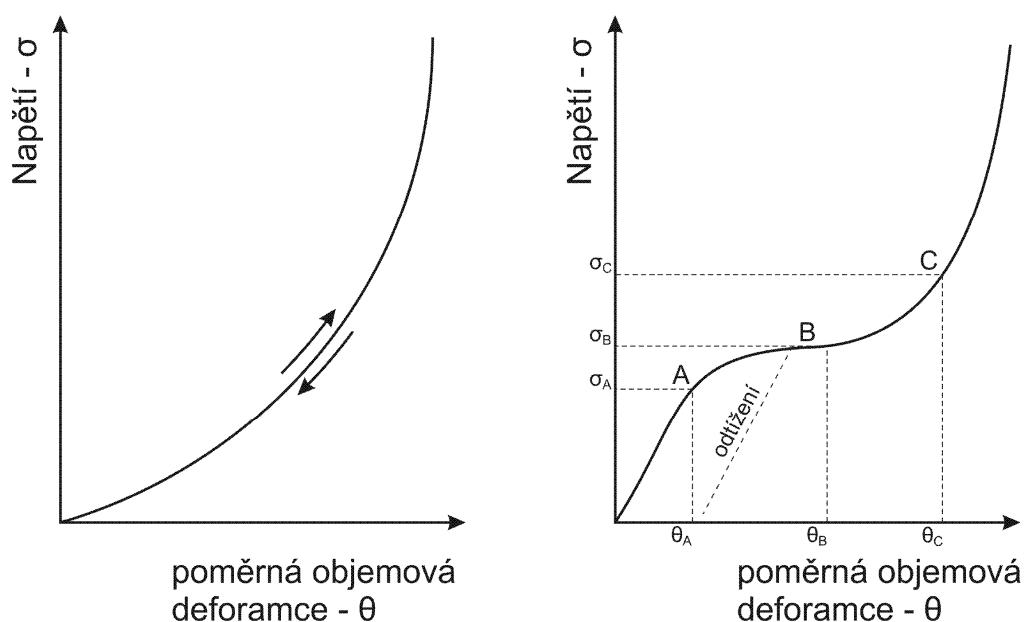
Stejně jako v pružnosti a pevnosti, kde rozlišujeme napětí normálová (tahová, tlaková) a tečná (smyková), tak napěťové vlny dělíme na normálové a tečné (tangenciální). Vlny normálové přenáší jen normálová napětí, analogicky tečné vlny (tangenciální) přenáší jen tečná napětí. Vyskytují se případy, kdy se od zdroje šíří oba druhy vln, které se však díky rozdílným rychlostem šíření od sebe oddělí. Jak už bylo zmíněno, normálová napětí lze rozlišit na tahová a tlaková, analogicky i normálové vlny lze rozlišit na tahové vlny a tlakové vlny. V prostředích, která nedokážou přenášet tahová napětí (například kapaliny, sypké materiály, aj.) nazýváme tahové vlny napětí, vlnami zředění. Takovéto materiály drží tvar nádoby, ve které jsou umístěny a soudržnost zajišťuje hydrostatický tlak.

Normálové vlny lze také nazývat vlnami objemovými, poněvadž normální napětí způsobují změnu objemu prvku hmoty. Kdežto smykové vlny lze nazývat vlnami tvarovými, protože ovlivňují změnu tvaru prvku.

Další rozdíl mezi normálovými a smykovými vlnami, je v povaze pohybu částic. V normálové vlně se částice pohybují ve směru šíření vlny, ve smykové vlně konají částice pohyb kolmý ke směru šíření vlny.

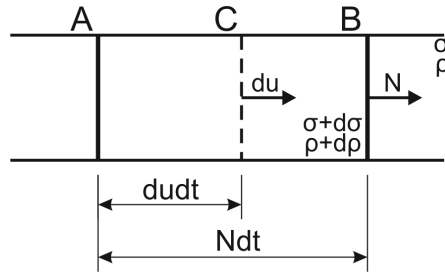
### 2.5.2. Rozdělení napět'ových vln z pohledu velikosti napětí

Chceme-li zkoumat chování a změnu vln v prostředí, musíme vědět, že toto chování je závislé hlavně na vlastnostech samotného prostředí. Je tedy nutné, abychom znali obecnou charakteristiku závislosti napětí při všestranném objemovém stlačení a poměrné objemové deformaci, tedy  $\sigma - \theta$ . Obecné charakteristiky kapalin, plynů a pevných látek lze vidět na grafu převzatého z [1.]



Obrázek 2.7 - Závislost tlakových napětí na poměrné objemové deformaci, kapalin, plyny aj. (vlevo), tuhá tělesa (vpravo)

Druhou nezbytnou věcí, je znalost šíření rychlosti normálních napětí v podélné vlně. Pro objasnění této problematiky, zavedeme infinitesimální element, v němž se šíří podélná vlna s veličinami  $d\sigma$  - napětí,  $du$  - hmotová rychlost a rychlost vlny  $N$ . Uvažujme příchod vlny do průřezu A v čase  $t$ . V čase  $t + dt$  dorazí vlna do průřezu B a urazí dráhu  $N \cdot dt$ , kdežto hmota dorazí do průřezu C a urazí dráhu  $du \cdot dt$ . Stav prostředí se po příchodu vlny změní z  $\sigma$  na  $\sigma + d\sigma$  a z  $\rho$  na  $\rho + d\rho$ .



Obrázek 2.8 - Schéma průchodu podélné vlny

Zákon zachování hybnosti (2.13) a zákon zachování hmoty vypadá (2.14) takto:

$$\rho \cdot N \cdot du = d\sigma, \quad (2.13)$$

$$\rho \cdot N \cdot dt = (\rho + d\rho) \cdot (N - du) \cdot dt. \quad (2.14)$$

Po úpravě rovnice (2.14) dostaneme:

$$N \cdot d\rho = \rho \cdot du. \quad (2.15)$$

Dále si vyjádříme rovnici pro měrný objem:

$$V = \frac{1}{\rho}, \quad dV = d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\left(\frac{1}{\rho^2}\right) d\rho, \quad (2.16)$$

kde

$V$  objem,

a rovnici pro poměrnou objemovou deformaci

$$d\theta = \frac{dV}{V} = \frac{d\rho}{\rho^2} \cdot V = \frac{d\rho}{\rho}. \quad (2.17)$$

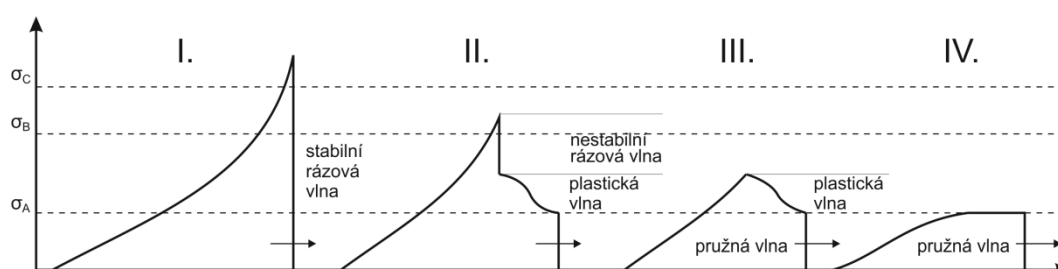
Využitím rovnic (2.17) a (2.15) dostáváme vztah pro rychlost vlny a hmotovou rychlost

$$N = \sqrt{\frac{d\sigma}{d\rho}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\sigma}{d\theta}\right)} = V \cdot \sqrt{\frac{d\sigma}{dV}} = \frac{du}{d\theta}, \quad (2.18)$$

$$du = \frac{d\sigma}{\rho \cdot N}, \quad u = \frac{\sigma}{\rho \cdot N}. \quad (2.19)$$

Rovnici napětí (2.18), použijeme pro popsání mechanismu podélných vln napětí. Pro popsání mechanismu, uvažujme prozatím pouze nelineárně pružná prostředí, jako

například kapaliny a plyny. Přihlédneme-li na Obrázek 2.7 zjistíme, že pro jakékoliv  $\theta$  je  $\frac{d\sigma}{d\theta} > 0$  a  $\frac{d^2\sigma}{d\theta^2} > 0$ . Z této úvahy vyplývá, že pro rostoucí  $\sigma$ , roste i rychlost šíření podélné vlny  $N$ . Lze vyvodit jednoduchý závěr, pro větší tlaky dostáváme vyšší rychlosti šíření podélné vlny, menší tlaky se tím pádem budou šířit pomaleji. Během šíření dojde k "seskládání" jednotlivých vln s různými rychlostmi za sebe a získáme tak profil vlny. Na čele profilu vlny (Obrázek 2.9), lze vidět skokovou změnu a vlna s takovýmto profilem se nazývá "rázová". Tato vlna má ještě jednu důležitou vlastnost, dojde-li při jejím šíření nějakým způsobem k rozrušení rychlostního profilu, díky výše zmíněné vlastnosti se profil rázové vlny vytvoří znovu, jedná se tedy o "stabilní rázovou vlnu". Rychlost šíření vlny při  $\sigma \rightarrow 0$  je  $N = c_z$ , kde  $c_z$  je rychlost zvuku v prostředí.



Obrázek 2.9 - Profil výbuchové vlny v pevném tělese (závislost napětí - vzdálenost): profil v oboru I. stabilního rázu, II. nestabilního rázu, III. plastickém, IV. pružném

Uvažujeme-li pevné prostředí a tlak nacházející se v intervalu  $0 \leq p \leq \sigma_A$ , dochází ke změně napětí lineárně (Obrázek 2.7). V materiálu nedochází k žádným změnám struktury. Derivace  $\frac{d\sigma}{d\theta}$  je konstantní a všechny tlaky se šíří rychlostí zvuku  $N = c_z$ , která je závislá na prostředí, vlna se nazývá "pružná". Dojde-li k vnějšímu zásahu, může se z pružné vlny vyvinout vlna rázová, ovšem se vzrůstající vzdáleností se vlna opět stane pružnou. Nedochází ke vzniku stabilní rázové vlny, ale vzhledem k dočasnosti trvání, se vlna nazývá "nestabilní rázová".

Nachází-li se tlak v intervalu  $\sigma_A \leq p \leq \sigma_B$ , dochází ke změnám ve struktuře pevné látky, látka postupně ztrácí smykové vazby a přenáší jen tlaková napětí, postupně se chová jako kapalina či prach. Takováto vlna se nazývá "plastická" a vyšší tlaky se zde pohybují pomaleji než nižší a to na základě  $\frac{d\sigma}{d\theta} > 0$  a  $0 < \frac{d^2\sigma}{d\theta^2}$ .

Tlak nacházející se v  $\sigma_B \leq p \leq \sigma_C$ , má za následek, že prostředí nepřenáší žádná smyková napětí a chová se jako kapalina. Navíc jsou derivace  $\frac{d\sigma}{d\theta} > 0$  a  $\frac{d^2\sigma}{d\theta^2} > 0$ ,

ale jsou menší než v případě, kdy se tlak nachází v intervalu  $0 \leq p \leq \sigma_A$ . Také zde dochází k formování stabilní rázové vlny, avšak její rychlost  $N < c_z$ . Tuto oblast nazýváme obor "stabilních podzvukových vln".

### 2.5.3. Povrchová vlna

Povrch lze považovat jako hranici mezi prostředími, například země - vzduch, skála - zemina, atp. Při hranicích prostředí se mohou šířit tzv. povrchové vlny. Vlny se dělí dle pohybu částic, tvaru a smyslu drah, které opisují jednotlivé částice prostředí. Jednotlivé druhy vln jsou pojmenovány podle svých objevitelů, či svého významu:

1. **Rayleighova R vlna** - Při příchodu této vlny, začnou částice konat rovinný eliptický pohyb. V závislosti na vzdálenosti od povrchu se poloosy elips rychle zmenšují.
2. **Loveova Q vlna** - Při příchodu tohoto druhu vlny, začnou částice konat prostorový pohyb, jenž obsahuje složky rovnoběžné s rovinou šíření vlny a složky ve směru příčném.
3. **Hydrodynamická vlna H** - Částice při povrchu prostředí konají rovinný pohyb jako při Rayleighově R vlně. Tato vlna ovšem neobsahuje složky smykových napětí. Nejčastěji se tato vlna šíří při povrchu kapalin a jiných prostředí, jenž smykové složky nepřenáší.
4. **Spřažená C vlna** - Částice při povrchu konají složitý prostorový pohyb.
5. **Hlavní vlna** - Částice prostředí se při této vlně pohybují po rovnoběžných přímkách vzhledem k povrchu.

### 3. Rázy

Ráz lze charakterizovat jako prudkou změnu rychlosti některého průřezu, nebo prudkou změnu působících sil, jež je doprovázena vznikem napěťových vln. Napěťové vlny se dále šíří tělesem, díky odrazům a vzájemným průnikům jednotlivých vln dochází ke vzniku velmi složitých napjatostních stavů v tělese. Ráz patří k přechodovým dějům, které vznikají v konstrukci, například nedokonalostí či opotřebením (vůle v mechanismech) nebo také vlivem pracovního zatížení. Vzniká především při kontaktu dvou a více těles, které mají odlišné vektory rychlostí. Doprovodným efektem rázů je náhlá změna vektoru rychlostí těch těles, které se na rázu podílejí. Poněvadž při rázu vzniká celá řada komplikovaných jevů, které je obtížné vysvětlit, byly postupně vypracovány tři teorie řešení, ty jsou řazeny dle doby vzniku.

- a) Stereostatická teorie rázu - Newtonova metoda
- b) Hertzova teorie
- c) Vlnová teorie rázu

Jednotlivé teorie budou postupně popsány níže.

#### 3.1. Stereostatická teorie rázu - Newtonova metoda

Stereostatická teorie rázu byla postupně vyvíjena už od přelomu 16. a 17. století, kdy se rázem zabýval Galileo Galilei, po něm J. Marcus Marci, J. Wallis, E. Mariotte a mnoho dalších. Nicméně Issac Newton shrnul všechny předešlé práce a podařilo se mu vytvořit obecnou teorii rázu elastických těles, přičemž zavedl koeficient restituace. Právě díky tomu, nese teorie Newtonovo pojmenování. Stereostatická teorie vychází z tuhého tělesa a právě díky tomuto, nedostáváme odpovědi na důležitosti jako síly mezi kolidujícími členy, dobu trvání rázu, ztrátovost energie při rázu aj. Teorie pracuje pouze s kinetickou energií a nerespektuje deformační energii těles, která při rázu vznikne.

Délka rázu se odvíjí od velikosti jednotlivých kolidujících členů, je extrémně krátká a trvání rázu je řádově  $10^{-4} - 10^{-6}$  s. Vzhledem k této krátké době, dochází k obrovským kontaktním silám a téměř okamžitě se mění jednotlivé rychlosti kolidujících členů.

Důvod, proč se toto řešení i přes svou nedokonalost stále hojně využívá, tkví v jeho jednoduchosti. Ze známých rychlostí těles před kolizí, jsme schopni určit rychlosti jednotlivých těles po rázu.

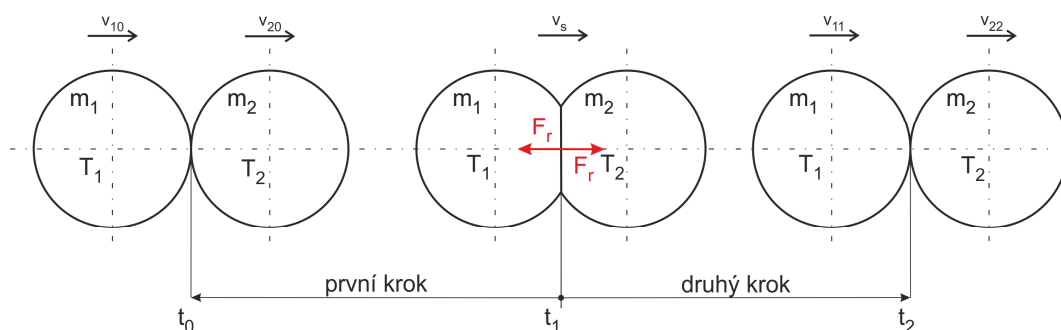


### 3.1.1. Centrální přímý ráz koulí

Pro ukázkou a názorné pochopení stereostatické teorie, sestavíme řešení jednoduché úlohy, kde dochází k rázu dvou těles, jež mají tvar koule. Jednotlivé koule mají tyto parametry:

- hmotnost -  $m_1$  a  $m_2$
- rychlost před rázem -  $v_{10}$  a  $v_{20}$ , zároveň  $v_{10} > v_{20}$
- rychlost po rázu -  $v_{11}$  a  $v_{22}$

Celý průběh rázu lze rozdělit na dva kroky:



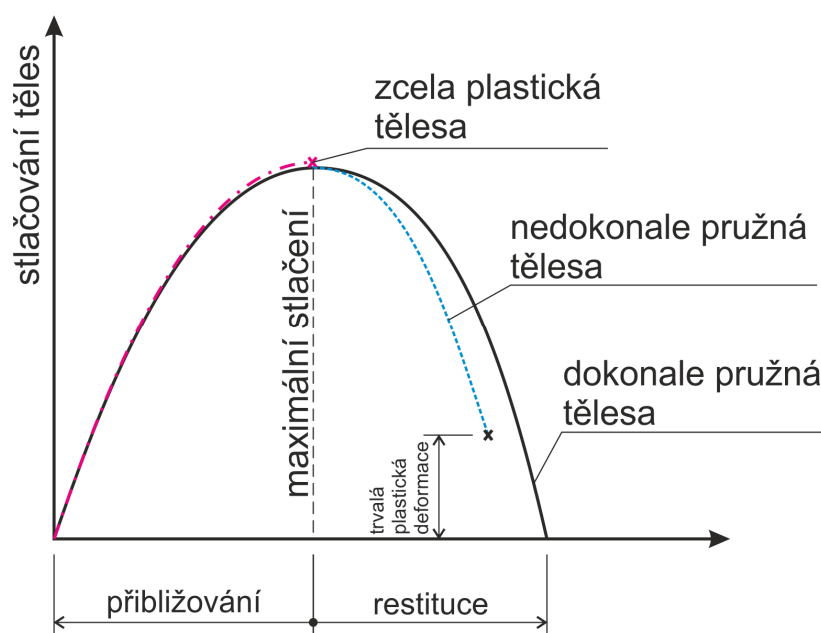
Obrázek 3.1 - Ráz koulí u Newtonovy metody

- 1. První krok** - v tomto kroku dochází k vzájemnému přiblížení jednotlivých těžišť. Ve chvíli, kdy jsou k sobě těžiště nejbližší, je dosaženo maximální deformace. Kinetická energie se mění na energii potenciálovou (deformační). V čase maximální deformace, označme jej  $t_1$  se tělesa pohybují společnou rychlostí  $v_s$ .

$$v_s = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} \quad (3.1)$$

- 2. Druhý krok (restituce)** - začíná na konci prvního kroku a v tomto kroku dochází k vzájemnému oddalování těles až k rozdělení (úplné rozdělení není podmínka). Rozhoduje se o rychlostech těles po rázu a dochází ke zpětné přeměně potenciální energie na kinetickou. Pružné deformace postupně mizí a tělesa obnovují svůj tvar. Období restituce lze rozdělit na tři případy:

- Ráz zcela plastických těles
- Ráz dokonale pružných těles
- Ráz nedokonale pružných těles



První dva případy lze považovat za okrajové. Při rázu zcela plastických těles, nastává pouze jeden krok a to přibližování. Jakmile dojde k rázu těles, dochází k částečné přeměně kinetické energie na potenciální (deformační) a tělesa se pohybují společnou rychlostí, ke zpětné transformaci energií už nedochází. Tuto situaci si lze představit například, jako ráz těles z vyrobených z měkké hlíny (za předpokladu malé rychlosti).

Zkoumáme-li ráz dokonale pružných těles, je v prvním kroku průběh stejný jako v předchozím případě, po maximální stlačení ovšem nastává krok obnovení (restituce) a tělesa začínají nabývat svého původního tvaru, dochází ke zpětné přeměně energií. Při rázu dokonale pružných těles, nedochází k žádné trvale deformaci.

V reálném světě se ovšem setkáváme s případem posledním a to rázem nedokonale pružných těles. Kdy se část energie přemění na energii deformační a při vzniku plastických deformací dojde k nevratnému pohlcení části této energie. Newton tedy vymyslel koeficient restituce  $r$ , který tento jev bere v úvahu.

Pro řešení modelové situace vycházíme ze zákona zachování hybnosti

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_{11} + m_2 v_{22}. \quad (3.2)$$

Pro narážející tělesa platí

$$m_1 (v_s - v_{11}) = r \cdot m_1 (v_{10} - v_s), \quad (3.3)$$

kde

$r$  koeficient restituce,

a pro narážené těleso, ve stejné chvíli platí

$$m_2(v_{22} - v_s) = r \cdot m_2(v_s - v_{20}). \quad (3.4)$$

Spojíme-li tyto vztahy dostáváme

$$v_{11} - v_{22} = -r(v_{10} - v_{20}). \quad (3.5)$$

Provedeme-li matematické úpravy předešlých rovnic, získáme

$$v_{11} = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} r (v_{10} - v_{20}), \quad (3.6)$$

$$v_{22} = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} r (v_{10} - v_{20}). \quad (3.7)$$

Kinetickou energii před rázem vyjádříme rovnicí

$$E_{k1} = \frac{1}{2} (m_1 v_{10}^2 + m_2 v_{20}^2). \quad (3.8)$$

Pro kinetickou energii po rázu

$$E_{k2} = \frac{1}{2} (m_1 v_{11}^2 + m_2 v_{22}^2). \quad (3.9)$$

Z rozdílu vztahu (3.8) a (3.9) získáme výsledný vzorec pro ztracenou energii

$$\Delta E_k = E_{ztr.} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - r^2) (v_{10} - v_{20})^2, \quad (3.10)$$

kde

$E_{k1}$  kinetická energie těles před rázem,

$E_{k2}$  kinetická energie těles po rázu,

$\Delta E_k$  ztracená energie v rázu.

Z odvozeného vzorce pro ztrátu energie lze pozorovat vliv koeficientu restituce. Bude-li  $r = 1$ , nastane situace rázu dokonale pružných těles. Naopak, bude-li  $r = 0$ , nastane

ráz zcela plastických těles a dojde k maximální ztrátě energie. Nachází-li se koeficient restituice v intervalu  $0 < r < 1$ , dochází k rázu nedokonale pružných těles.

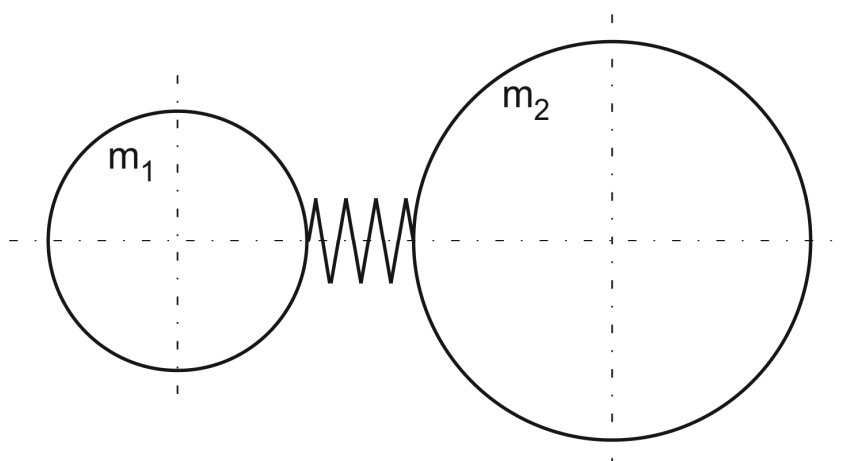
### 3.1.2. Koeficient restituice - $r$

Stereostatická metoda řešení rázu byla pojmenována podle Newtona, hlavně zavedení koeficientu restituice. Ten, jak jsme si v předchozím výkladu ukázali, zohledňuje "nedokonale" pružný ráz a zmaření energie nevratnými ději. Je třeba říct že koeficient restituice není žádná materiálová konstanta, je ovlivňován velkým množstvím faktorů. Je závislý na situaci při které k rázu došlo, na velikostech jednotlivých těles, geometrii, kontaktních plochách, rychlosti rázu, materiálem těles, a mnoho dalších ...

## 3.2. Hertzova teorie

Hertzova teorie, také nazývána kvazistatická, se snaží odstranit nedostatky Newtonovy metody. Ta nám pro připomenutí, dává povědomí o stavu těles po rázu, kde je podmínkou znalost rychlostí těles před rázem, ale není schopna určit časové průběhy a velikosti sil během rázu nebo délku jeho trvání.

Hertz pro svou teorii uvažoval dotyk dvou těles, které pokládal za absolutně tuhá s výjimkou kontaktních ploch. Pro kontaktní plochy předpokládal, že k deformacím dochází pouze v nejbližší oblasti vzájemného kontaktu. Se vzrůstající vzdálenosti od kontaktního místa, deformace rychle mizí. Při těchto předpokladech, lze ráz dvou koulí nahradit zjednodušujícím schématem (Obrázek 3.2). Oblast, kde vznikají pružné deformace byla nahrazena pružinou



Obrázek 3.2 - Ilustrační vyobrazení Hertzovy teorie

Zatížení vzhledem k času pojal Hertz "staticky" a uvažoval, pro každý okamžik rázu statické deformace a statické zatěžující síly, ač je ráz čistě dynamickým dějem.

Nicméně daň za tato zjednodušení je doba trvání rázu, pro kterou mají výsledky relevantní hodnotu. Ta musí být minimálně o řád vyšší, než doba průchodu napěťové vlny tělesem a jejím následným odrazem až do místa styku. Oblast styku dvou těles je velmi citlivá na jakost povrchu, kdy i nepatrná nerovnost ovlivní rozložení tvar kontaktní oblasti a rozložení napětí.

Ukážeme si řešení rázu dvou koulí pomocí Hertzovy teorie. Uvažujme dvě koule o hmotnosti  $m_1, m_2$ , poloměry  $r_1, r_2$  a rychlostmi  $v_{10}$  a  $v_{20}$ . Pro řešení budou použity tyto Hertzovy vztahy

$$F = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad (3.11)$$

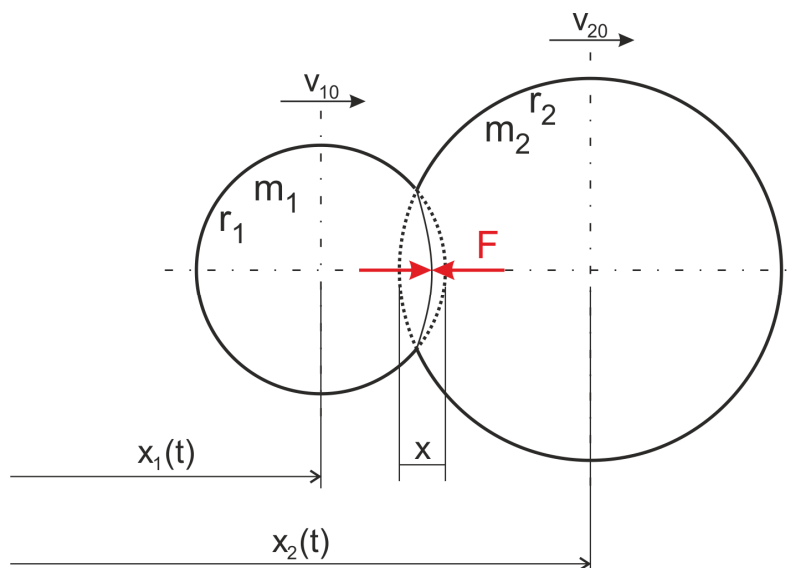
koeficient  $\alpha$  je dán vztahem

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{9}{16} \frac{(r_1 + r_2)}{r_1 r_2} \left[ \frac{(1 - \mu_1^2)}{E_1} + \frac{(1 - \mu_2^2)}{E_2} \right]^2}, \quad (3.12)$$

kde

$E_1, E_2$  modul pružnosti v tahu

$\mu_1, \mu_2$  Poissonova konstanta



Obrázek 3.3 - Vyobrazení situace pro řešení

Pro koule platí pohybové rovnice ve tvaru

$$m_1 \ddot{x}_1 = -F, \quad (3.13)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = F. \quad (3.14)$$

Odečteme-li od sebe rovnice (3.13) a (3.14), dostaneme:

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} F. \quad (3.15)$$

Můžeme napsat, že  $\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = \ddot{x}$  a pro  $F$  dosadit z rovnice (3.11)

$$\ddot{x} = -\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad (3.16)$$

zavedeme-li rovnici

$$\ddot{x} = \frac{dx^2}{2dx}, \quad (3.17)$$

a dosadíme do (3.16), získáme

$$d\dot{x}^2 = -2 \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} dx. \quad (3.18)$$

Provedeme integraci rovnice (3.18)

$$\dot{x}^2 = -2 \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} \frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}} x^{\frac{5}{2}} + C_1. \quad (3.19)$$

$C_1$  je integrační konstanta, její hodnotu dostaneme z okrajové podmínky pro  $x = 0$  a  $\dot{x} = v_{10} - v_{20}$ . Výsledkem bude

$$C_1 = (v_{10} - v_{20})^2, \quad (3.20)$$

dosadíme zpátky do (3.19) a získáme

$$\dot{x}^2 - (v_{10} - v_{20})^2 = -2 \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} \frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}} x^{\frac{5}{2}}. \quad (3.21)$$

Pomocí rovnice (3.21) jsme schopni zjistit maximální stlačení těles, předpokládáme-li, že k největšímu stlačení dojde při  $\dot{x} = 0$

$$x_{max} = \left( \frac{5}{4} \alpha^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^{\frac{2}{5}} (v_{10} - v_{20})^{\frac{4}{5}}. \quad (3.22)$$

Díky znalosti maximálního stlačení a rovnice (3.11), jsme schopni určit maximální rázovou sílu

$$F_{max} = \left( \frac{5}{4} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2) \alpha} (v_{10} - v_{20})^2 \right)^{\frac{3}{5}}. \quad (3.23)$$

Chceme-li se dozvědět dobu rázu, využijeme rovnici (3.21)

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(v_{10} - v_{20})^2 - \frac{4}{5} \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)^{\frac{5}{2}} \frac{x^2}{\alpha^2}}}. \quad (3.24)$$

Pro určení celkové doby rázu až k oddělení těles, upravíme rovnici (3.25)

$$t_c = 2 \int_0^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{(v_{10} - v_{20})^2 - \frac{4}{5} \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)^{\frac{5}{2}} \frac{x^2}{\alpha^2}}}. \quad (3.26)$$

Dále už tento integrál rozvádět nebudeme, ale díky faktu, že přibližování a oddalování je časově souměrný děj, lze integrál zjednodušit.

### 3.3. Vlnová teorie rázu

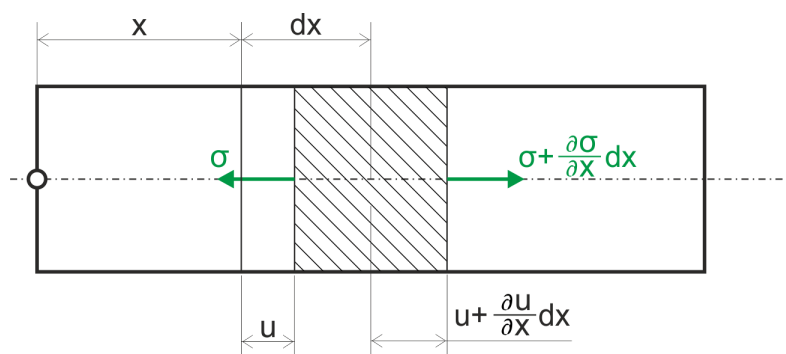
V předchozích kapitolách byly popsány dvě metody řešení rázu těles. Třetí metoda se dá považovat za nejpropracovanější, je uvažováno s rychlostí přenosu sil, nebo-li rychlost šíření napětí. Pro připomenutí, Hertzova metoda předpokládala, že síly vznikají v celém tělese současně a šíří se tedy nekonečnou rychlostí. Při postupném vývoji této teorie, objevil Poisson dva základní typy vln, jež se tělesem šíří, je to:

- Podélná vlna
- Příčná vlna

Vlnová teorie využívá pro řešení spojitého kontinua, ovšem s vlastnostmi, které lze popsat analyticky. Metoda řešení je velmi rozsáhlá a použitelná pro mnoho případů rázového zatížení. V tomto textu se budeme ovšem zabývat jednoduchým příkladem a to šířením pouze podélných vln v prismatické tyči.

### 3.3.1. Šíření podélné napět'ové vlny v prismatické tyči

Předpokládejme tyč, jejíž příčné rozměry jsou ve srovnání s délkou malé. Pro jednoduchost a názornost vysvětlení, zanedbáme příčné posuvy tyče.



Obrázek 3.4 - Prismatický nosník

Na vybraný element (šrafovaný, Obrázek 3.4) působí síla, kterou lze vyjádřit rovnicí

$$A \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx = \rho A dx \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3.27)$$

kde  $A$  je průřez tyče. Po úpravě a vykrácení jednotlivých členů, dostaneme vztah

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (3.28)$$

Využijeme Hookeova zákona, jenž má tvar

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.29)$$

Rovnici (3.29) dosadíme do (3.28), provedením úprav dostaneme rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_n^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.30)$$



kde  $c_n$  je rychlost šíření zvuku v materiálu, která je dána

$$c_n = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (3.31)$$

Rovnice (3.30) je hyperbolického tvaru, také označována jako vlnová rovnice. Obecné řešení vlnové rovnice je ve tvaru

$$u = f(x - c_n t) + h(x + c_n t), \quad (3.32)$$

kde funkce  $f$  a  $h$  jsou libovolné, nezávislé a popisují tvar vlny.

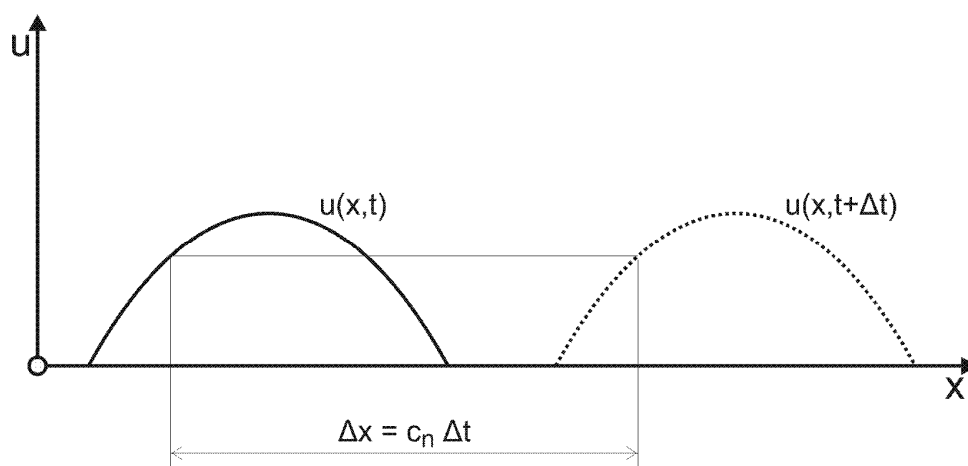
Vztah (3.32) tedy popisuje šíření vlny v jednorozměrném prostoru a popisuje děje, které jsou charakterizovány šířením (přenosem) energie. Pro názornost budeme uvažovat funkci  $h = 0$ . Tímto předpokladem dostaneme

$$u = f(x - c_n t). \quad (3.33)$$

Zvětšíme-li čas o  $\Delta t$ , zvětší se i vzdálenost dle

$$\Delta x = c_n \Delta t. \quad (3.34)$$

Díky této závislosti dostaneme stejnou hodnotu posuvu  $u$ , graficky lze situaci vyjádřit Obrázek 3.5.



Obrázek 3.5 - Zobrazení šíření vlny

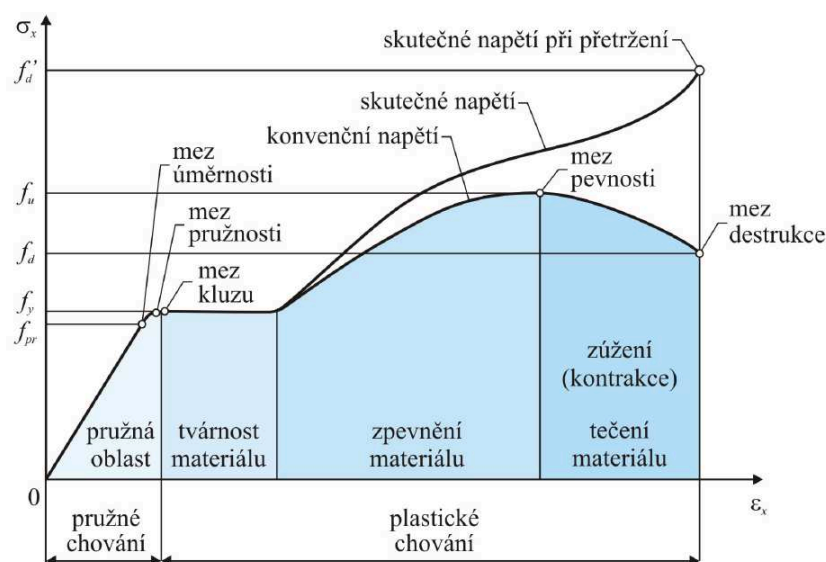
Pro připomenutí, jak u bylo zmíněno v kapitole 2. - Výbuch, rychlost šíření vlny není stejná a nemá nic společného s rychlost hmotných částic.

## 4. Plasticita

Schopnost tělesa se při zatížení vnějších sil trvale, nevratně a bez porušení deformovat, se nazývá plasticita. Tělese se nachází ve stavu trvalé deformace. Ztěžování a následné odlehčení tělesa, které překročilo mez kluzu se řídí dle jiných, než lineárních zákonitostí. Hovoříme tedy o fyzikální nelinearitě. Původ tohoto jevu je třeba hledat ve struktuře látek, kdy při plastickém chování dochází ke změnám v krystalické mřížce materiálu z něhož je těleso tvořeno. Plastické chování materiálu ovlivňuje řada faktorů, například rychlost deformace, teplota, vnější tření, apod.

Průběh plastického chování materiálu se zjišťuje experimentálně, například tahovou zkouškou, jejíž výstupem je závislost poměrného prodloužení na zatěžující tahové síle. Tyto veličiny, jsou dále přepočteny na závislost napětí a deformace a výstupem je diagram s křivkou této závislosti. V praxi jsou rozlišovány dva druhy tohoto diagramu, smluvní a skutečný.

Smluvní diagram je vztažen k původnímu průřezu zkušební tyče, zatímco skutečný se vztahuje ke skutečnému(okamžitému) průřezu tyče, který se během zkoušky mění.



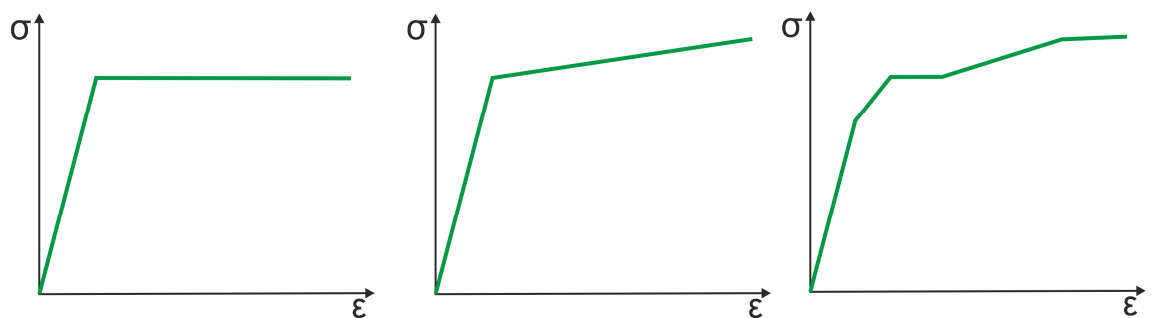
Obrázek 4.1 - Diagram závislosti napětí na deformaci z tahové zkoušky [12.]

Na Obrázek 4.1 lze vidět diagram z tahové zkoušky. V tomto diagramu je zobrazeno několik významných bodů:

- **Mez úměrnosti** - až do meze úměrnosti platí Hookeův zákon a závislost mezi napětím a deformací je lineární.

- **Mez pružnosti** - v materiálu stále vznikají pružné deformace, ovšem závislost mezi napětím a deformací už není lineární a neplatí zde Hookeův zákon.
- **Mez kluzu** - po dosažení meze kluzu dochází k plastickým (nevratným) deformacím. Velikost deformace se zprvu zvětšuje aniž by vzrůstalo napětí.
- **Mez pevnosti** - než materiál dosáhne meze pevnosti, dochází k tzv. zpevňování materiálu. Za meze pevnosti dochází k tvorbě krčku a následné kontrakci průřezu .
- **Mez destrukce** - při dosažení meze destrukce dojde k přetržení zkušebního vzorku

Pro potřeby výpočtů, se využívá aproximace diagramu. Možnosti aproximace jsou rozsáhlé, diagram lze aproximovat pouze lomenou čarou a to s možností volby plastického chování (zcela plastické chování, s uvážením zpevnění) nebo po částech spojitými čarami (Obrázek 4.2) či funkcí, která dostatečně popisuje chování materiálu.



Obrázek 4.2 - Aproximace diagramu, lomenou čarou pro plně plastické chování (vlevo), s uvážením zpevnění (uprostřed), po částech spojitými čarami (vpravo)

Zejména poslední možnost je značně rozvinutá a bylo vytvořeno mnoho modelů vhodných pro různé typy materiálu (pryže, různé slitiny, pěny, atd.). Nejčastěji nesou materiálové modely názvy dle svých autorů, například:

- Ogdenův materiálový model
- Mooney - Rivlingův materiálový model
- Yehovův materiálový model
- Ramberg - Osgoodův materiálový model
- Kelvin - Voightův materiálový model
- a mnoho dalších.

Pro účely této práce, bude podrobněji popsán mechanismus Ramberg-Osgoodova materiálového modelu.

#### 4.1. Ramberg-Osgoodův materiálový model

Autoři Ramberg a Osgood stanovili rovnici, která byla původně určena k popisu chování hliníkových slitin

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} + p \left( \frac{\sigma}{\sigma_p} \right)^n, \quad (4.1)$$

kde

$\varepsilon$	deformace,
$\sigma$	napětí,
$\sigma_p$	mez kluzu,
$E_0$	modul pružnosti v tahu,
$p$	plastická deformace,
$n$	parametr.

Pro oceli byla rovnice (4.1) upravena do tvaru

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} + 0,002 \left( \frac{\sigma}{\sigma_{0,2}} \right)^n, \quad (4.2)$$

kde  $\sigma_{0,2}$  odpovídá hodnotě meze kluzu při deformaci 0,2%. Pro určení parametru  $n$ , se využívá rovnice

$$n = \frac{\ln(20)}{\ln(\sigma_{0,2}/\sigma_{0,01})}, \quad (4.3)$$

hodnota  $\sigma_{0,01}$  odpovídá mezi úměrnosti při deformaci 0,01%. Výše uvedené vztahy jsou platné pouze do meze kluzu materiálu  $\sigma_{0,2}$ .

Pro popis křivky závislosti napětí na deformaci nad mezí kluzu, je potřeba rovnici (4.3) upravit

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\bar{\sigma}}{E_{0,2}} + \bar{\varepsilon}_{up} \left( \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_u} \right)^m, \quad (4.4)$$

kde  $\bar{\varepsilon}$  a  $\bar{\sigma}$  lze vyjádřit jako

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon - \varepsilon_{0,2}, \quad (4.5)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma - \sigma_{0,2}. \quad (4.6)$$

Hodnota  $E_{0,2}$  označuje tečný modul v bodě  $\sigma_{0,2}$  a je dán rovnicí

$$E_{0,2} = \frac{E_0}{1+0,002 \cdot n/e}. \quad (4.7)$$

Velikost koeficientu  $e$  je dána vztahem

$$e = \frac{\sigma_{0,2}}{E_0}. \quad (4.8)$$

Výraz  $\overline{\varepsilon_{up}}$  je dán

$$\overline{\varepsilon_{up}} = \varepsilon_u - \varepsilon_{0,2} - \frac{\sigma_u}{E_0}, \quad (4.10)$$

kde

$\varepsilon_u$  hodnota deformace při přetržení vzorku,

$\sigma_u$  hodnota napětí při přetržení vzorku.

Pro korozivzdorné oceli je hodnota  $\overline{\varepsilon_{up}} \approx \varepsilon_u$ . Velikost koeficientu  $m$ , lze určit z rovnice

$$m = 1 + 3,5 \frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_u}. \quad (4.11)$$

Pro popis křivky závislosti napětí na deformaci v celém rozsahu až do přetržení vzorku, jsme získali dvě rovnice

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} + 0,002 \left( \frac{\sigma}{\sigma_{0,2}} \right)^n \quad \text{pro } \sigma \leq \sigma_{0,2} \quad (4.2)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma - \sigma_{0,2}}{E_{0,2}} + \varepsilon_u \left( \frac{\sigma - \sigma_{0,2}}{\sigma_u - \sigma_{0,2}} \right)^m + \varepsilon_{0,2} \quad \text{pro } \sigma > \sigma_{0,2} \quad (4.12)$$

## 4.2. Zpevnění materiálu

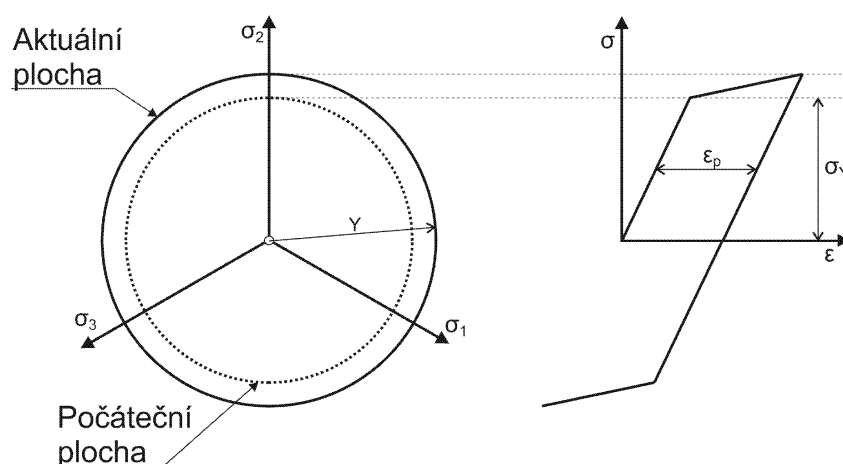
Vlivem plasticity dochází v určitých mezích ke zpevňování materiálu (Obrázek 4.1), což má za následek menší přírůstek deformace při zvyšujícím se napětí.

Pro výpočtové metody bylo vytvořeno několik druhů zpevnění:

- isotropní - mění se velikost plochy plasticity
- kinematické - mění se poloha plochy plasticity
- kombinované - kombinace isotropního a kinematického modelu

### 4.2.1. Isotropní zpevnění

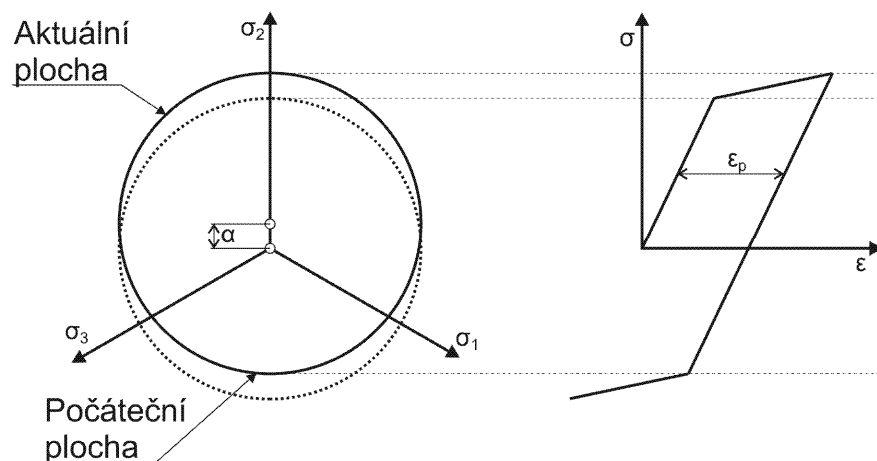
Uvažujeme-li pouze monotónní zatěžování, lze pro zpevňování využít isotropního modelu. Plocha plasticity se pouze zvětšuje ("nafukuje"), při využití tohoto modelu se předpokládá stejná mez kluzu v tahu i tlaku. V případě cyklického zatěžování je použití isotropního modelu zpevnění nevhodné, protože nedokáže zachytit tzv. Bauschingerův efekt, kdy materiál vykazuje v případě opačného zatížení jinou mez kluzu v tahu a tlaku.



Obrázek 4.3 - Isotropní model zpevnění

#### 4.2.2. Kinematické zpevnění

U modelu kinematického zpevňování nedochází ke změně velikosti plochy plasticity, nýbrž k posunutí polohy středu plochy plasticity. Díky tomuto lze při cyklickém zatížení zachytit Bauschingerův efekt, který již byl zmíněn výše.



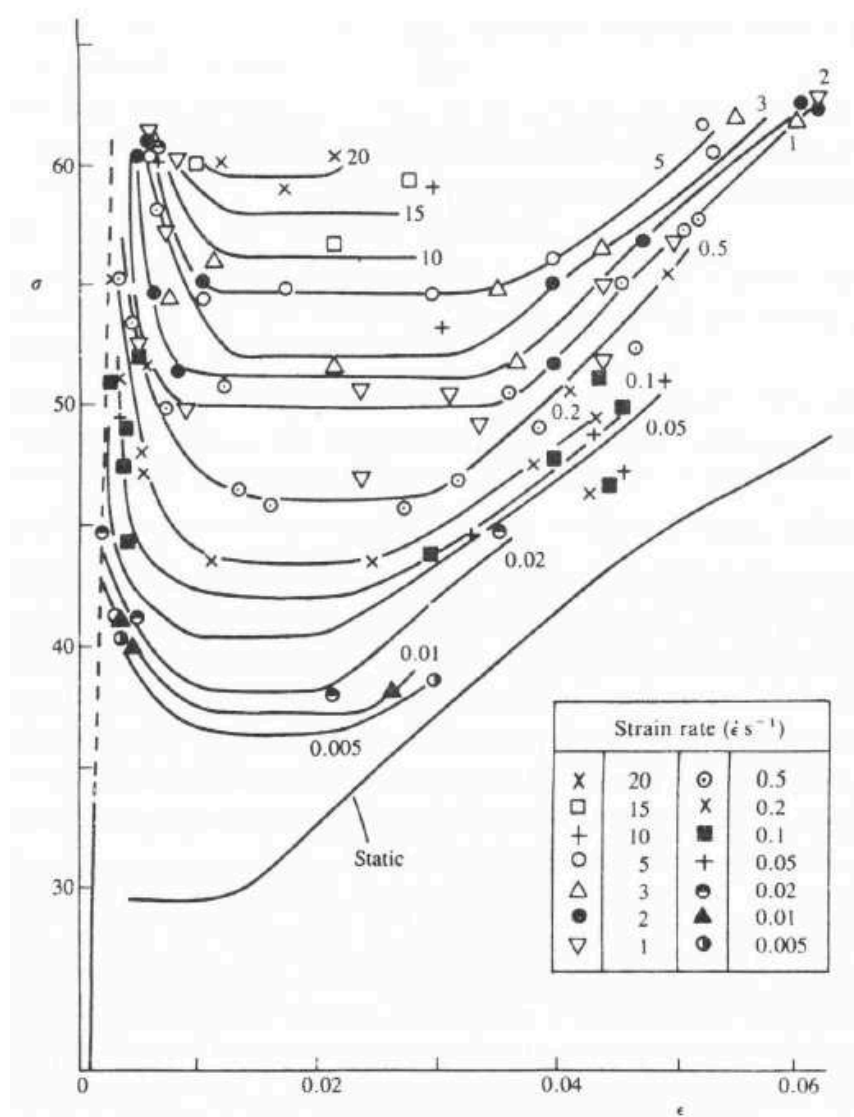
Obrázek 4.4 - Kinematické model zpevnění

#### 4.2.3. Kombinované zpevnění

Kombinovaný model zpevnění, jak už název napovídá je kombinací isotropního a kinematického model. Plocha plasticity současně posouvá a mění svou velikost.

## 5. Rychlé děje z hlediska materiálu

Jak už bylo popsáno v kapitole 3., rázy patří mezi rychlé dynamické děje, kdy dochází k prudké změně vektoru rychlosti a vzniku napěťových vln v tělese. Rychlost zatížení a deformace je z hlediska materiálu velmi důležitá. Některé materiály vykazují velkou závislost na rychlosti deformace, kdy se s rostoucí rychlostí deformace mění křivka plastického chování. Na Obrázek 5.1 získaného z [2.], lze vidět na křivky závislosti napětí na deformaci pro různé rychlosti deformací. Zkušební vzorky byly zhotoveny z oceli označované v literatuře [2.] jako "mild steel" nebo-li měkká ocel.



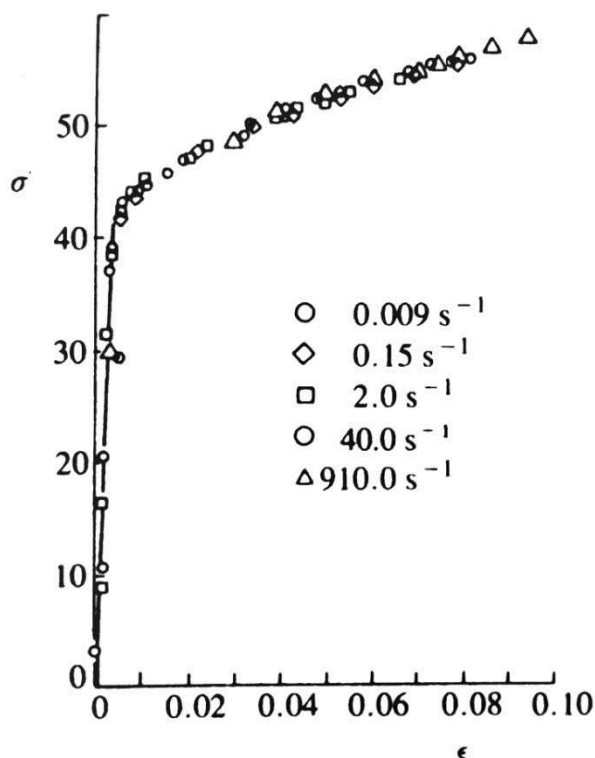
Obrázek 5.1 - Závislost křivky  $\sigma$ - $\epsilon$  na rychlosti deformace [2.]

Na obrázku lze jasně vidět, jak se mění křivka při zvětšující se rychlosti deformace. Je zjevné, že se materiál stává pevnějším, avšak s vyšší pevností se materiál stává méně houževnatým.



Výhodnost tohoto jevu je věcí diskuze. Větší pevnost může být výhodou, avšak v určitých oblastech, například havárie vlaku, může mít fatální následky. Mezi konstrukcí sedadla a cestujícím, mohou při kontaktu vzniknout velké nepředvídatelné síly, jenž mohou být pro cestujícího z hlediska zranění fatální.

Je zřejmé že závislost křivky na rychlosti deformace, není dáno geometrickou konfigurací ale materiálovými vlastnostmi. Existují také materiály, které rychlost deformace buď neovlivňuje nebo jen velmi málo.



Obrázek 5.2 - Slitina hliníku při různých rychlostech deformace

### 5.1. Materiálové modely

Pro řešení úloh s materiály, které jsou závislé na rychlosti deformace, bylo vytvořeno několik materiálových modelů v nichž je závislost rychlosti deformace zahrnuta. Názvy modelů nesou jména jejich autorů, jsou to zejména:

- Cowper - Symondsův model
- Johnson - Cookův model
- Zerrili - Armstrongův model

### 5.1.1. Cowper - Symondsův materiálový model

Autoři Cowper a Symonds vytvořili rovnici pro materiálový model, jenž uvažuje závislost rychlosti deformace. Model je dán rovnicí

$$\dot{\varepsilon} = D \left( \frac{\sigma'_0}{\sigma_0} - 1 \right)^q, \quad (5.1)$$

kde

$\dot{\varepsilon}$	rychlost deformace,
$\sigma_0$	statické napětí,
$\sigma'_0$	dynamické napětí,
$D, q$	konstanty.

Rovnici (5.1), lze také přepsat do tvaru

$$\frac{\sigma'_0}{\sigma_0} = 1 + \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{D} \right)^{1/q}, \quad (5.2)$$

Koeficienty  $D, q$  pro některé materiály lze nalézt v Tabulka 1, která je převzata z [2.].

Materiál	$D [s^{-1}]$	$q$	Autor
Měkká ocel	40,4	5	Cowper a Symonds
Slitiny hliníku	6500	4	Bodner a Symonds
Titan (Ti 50A)	120	9	Symonds a Chon
Korozivzdorná ocel 1.4301	100	10	Forrestal a Sagartz

Tabulka 1 - Přehled koeficientů  $D$  a  $q$  pro některé materiály

Rovnice (5.2) ovšem neuvažuje zpevnění materiálu. Pro uvážení zpevnňování materiálu má Cowper - Symondsův materiálový model tvar

$$\frac{\sigma'_0}{\sigma_0} = f(\dot{\varepsilon})g(\varepsilon), \quad (5.3)$$

kde  $f(\dot{\varepsilon})$  je pravá strana rovnice (5.2) a  $g(\varepsilon)$  je funkce popisující zpevnění materiálu.

### 5.1.2. Johnson - Cookův materiálový model

Tento model řeší multiplikativním způsobem tři základní odezvy materiálu a to deformační zpevnění, rychlost deformace a vliv teploty. Model je dán vztahem

$$\sigma_Y = \left[ A + B(\varepsilon_{eff}^p)^N \right] (1 + C \cdot \ln \dot{\varepsilon}) [1 - (T_H)^M], \quad (5.4)$$

kde

$\varepsilon_{eff}^p$	efektivní plastická deformace,
$\dot{\varepsilon}$	rychlost deformace,
$T_H$	homologační teplota,
A,B,C,N,M	koeficienty.

Výraz v první závorce na pravé straně řeší zpevnění materiálu, druhá závorka řeší rychlé deformace a poslední teplotní ovlivnění materiálu. Tento model vhodný pro výpočty v nichž se vyskytují rychlé děje, velké deformace jež mohou mít za následek prudké změny teploty (například tváření) přičemž dochází k měknutí materiálu.

### 5.1.3. Zerilli - Armstrongův materiálový model

Zerilli - Armstrongův materiálový model také uvažuje se zpevněním materiálu, rychlostí deformace a měknutím materiálu vlivem teploty. Model je popsán rovnicí

$$\sigma_Y = A + [C_1 + C_2 \sqrt{\varepsilon}] e^{(-C_3 + C_4 \ln \dot{\varepsilon})T} + C_5 \varepsilon^n, \quad (5.5)$$

kde  $A, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, n$  jsou koeficienty.

Tento model také pracuje s uspořádáním mřížky, pro plošně středěnou krychli jsou  $C_1 = C_5 = 0$ , pro objemově centrovanou krychli je  $C_2 = 0$ .

## 6. Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků se zabývá řešením problému kontinua rozdělením na určitý, konečný počet prvků (diskretizace), které jsou následně řešeny odděleně. Jedná se o nejrozšířenější metodu řešení kontinua a její použití je univerzální, využívá se k predikci průběhu napětí, deformací, vlastních frekvencí, přestupu tepla, elektromagnetickým jevům, atd...

Metoda byla vyvinuta pro řešení složitých problému, které již nebylo možné řešit analyticky. K největšímu rozmachu této metody, došlo v dobách prudkého rozvoje výpočetní techniky, kdy docházelo ke zvyšování výpočetního výkonu, velikosti operačních pamětí a diskového prostoru.

Hlavním krokem při použití této metody, je sestavení soustavy rovnic diskretizovaného (rozloženého na konečné prvky) prostoru. Pro řešení těchto rovnic se využívá několika algoritmů v závislosti na povaze úlohy. Dva nejčastěji používané budou rozebrány níže a to implicitní algoritmus a explicitní algoritmus.

### 6.1. Implicitní algoritmus

Pro řešení dynamických, transientních úloh se v dnešní době nejčastěji využívá implicitního algoritmu. Algoritmus vychází z pohybové rovnice

$$[M]\{\ddot{Q}\}_{n+1} + [C]\{\dot{Q}\}_{n+1} + [K]\{Q\}_{n+1} = \{F^{ext}\}_{n+1}, \quad (6.1)$$

kde

$[M]$	matice hmotnosti,
$[C]$	matice tlumení,
$[K]$	matice tuhosti,
$\{F^{ext}\}_{n+1}$	vektor zatěžujících vnějších sil v kroku $n + 1$ ,
$\{\ddot{Q}\}_{n+1}$	vektor odhadů zrychlení v kroku $n + 1$ ,
$\{\dot{Q}\}_{n+1}$	vektor odhadů rychlostí v kroku $n + 1$ ,
$\{Q\}_{n+1}$	vektor odhadů posunutí v kroku $n + 1$ .

Vektor odhadů zrychlení a posuvů lze získat ze vztahu

$$\{Q\}_{n+1} = \{Q\}_n + \{\dot{Q}\}_{n+1}\Delta t + \frac{(1-2\beta)\{\ddot{Q}\}_n\Delta t^2}{2} + \beta\{\ddot{Q}\}_{n+1}\Delta t^2, \quad (6.2)$$

nebo také

$$\{Q\}_{n+1} = \{Q\}_n^* + \beta \{\ddot{Q}\}_n \Delta t^2, \quad (6.3)$$

$$\{\dot{Q}\}_{n+1} = \{\dot{Q}\}_n^* + \gamma \{\ddot{Q}\}_n \Delta t, \quad (6.4)$$

kde

$$\begin{aligned} \Delta t & \quad \text{časový krok,} \\ \beta, \gamma & \quad \text{koeficienty.} \end{aligned}$$

Hodnoty vektorů  $\{Q\}_n^*$ ,  $\{\dot{Q}\}_n^*$  jsou určeny z předchozího kroku. Dosadíme-li rovnice (6.3) a (6.4) do pohybové rovnice (6.1) a provedeme matematické úpravy, dostaneme

$$([M] + [C]\gamma\Delta t + [K]\beta\Delta t^2)\{\ddot{Q}\}_{n+1} = \{F^{ext}\}_{n+1} - [C]\{\dot{Q}\}_n^* - [K]\{Q\}_n^*. \quad (6.5)$$

Výraz v závorce můžeme nahradit jedinou maticí  $[\hat{M}]$  a výraz na levé straně přepsat na  $\{F^{residual}\}_{n+1}$ . Rovnice bude mít tvar

$$[\hat{M}]\{\ddot{Q}\}_{n+1} = \{F^{residual}\}_{n+1}. \quad (6.6)$$

Chceme-li získat hodnoty zrychlení pro jednotlivé uzly, převedeme matici hmotnosti na levou stranu

$$\{\ddot{Q}\}_{n+1} = [\hat{M}]^{-1}\{F^{residual}\}_{n+1}. \quad (6.7)$$

Pro získání výsledků je třeba provést inverzi matice hmotnosti, následně převedení na trojúhelníkový tvar a řešení soustav rovnic. Implicitní algoritmus je nepodmíněně stabilní, z čehož vyplývá, že stabilita řešení nezávisí na volbě časového kroku. Stabilitou se rozumí udržení malých odchylek dvou po sobě jdoucích řešení, jejichž počáteční podmínky se liší o malou hodnotu.

## 6.2. Explicitní algoritmus

Řešení explicitního algoritmu vychází z pohybové rovnice ve tvaru

$$[M]\{\ddot{Q}\}_n + [C]\{\dot{Q}\}_n + [K]\{Q\}_n = \{F^{ext}\}_n. \quad (6.8)$$

Provedeme-li úpravu a část rovnice přesuneme na levou stranu, získáme

$$[M]\{\ddot{Q}\}_n = \{F^{ext}\}_n - [C]\{\dot{Q}\}_n - [K]\{Q\}_n. \quad (6.9)$$

Část veličin na levé straně můžeme sloučit do jediného vektoru

$$[M]\{\ddot{Q}\}_n = \{F^{ext}\}_n - \{F^{int}\}_n. \quad (6.9)$$

Řešení pro zrychlení v uzlech získáme stejně jako v případě implicitního algoritmu

$$\{\ddot{Q}\}_n = [M]^{-1}\{F^{residual}\}_n. \quad (6.10)$$

U explicitních algoritmů se s výhodou využívá diagonalizace matice hmotnosti, díky čemuž nejsou jednotlivé uzly spolu nijak svázány, soustava rovnic má triviální řešení a není třeba řešit inverzi matice hmotnosti. Pro určení rychlostí a posunutí se použijí rovnice

$$\{\dot{Q}\}_{n+1/2} = \{Q\}_{n-\frac{1}{2}} + \{\ddot{Q}\}_n \frac{(\Delta t_{n+1/2} + \Delta t_{n-1/2})}{2}, \quad (6.11)$$

$$\{Q\}_{n+1} = \{Q\}_n + \{\dot{Q}\}_{n+1/2} \Delta t_{n+1/2}. \quad (6.12)$$

Explicitní algoritmus je podmíněně stabilní, z čehož vyplývá, že řešení je závislé na délce časového kroku. Pro určení délky časového kroku se využívá Courantova kritéria. Časový krok nesmí být větší, než je kritická délka určena vztahem

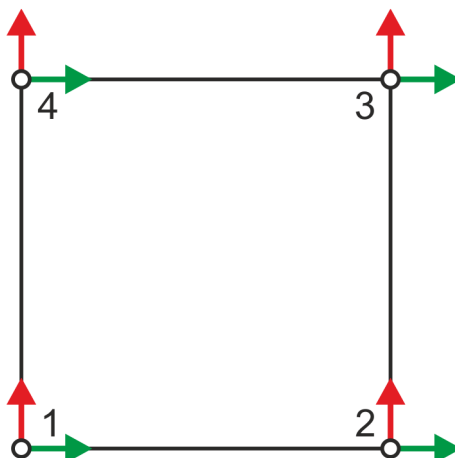
$$\Delta t_{crit} = L \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E}}, \quad (6.13)$$

kde

$\Delta t_{crit}$	kritická délka časového kroku,
$L$	délka hrany nejmenšího elementu,
$E$	modul pružnosti materiálu.

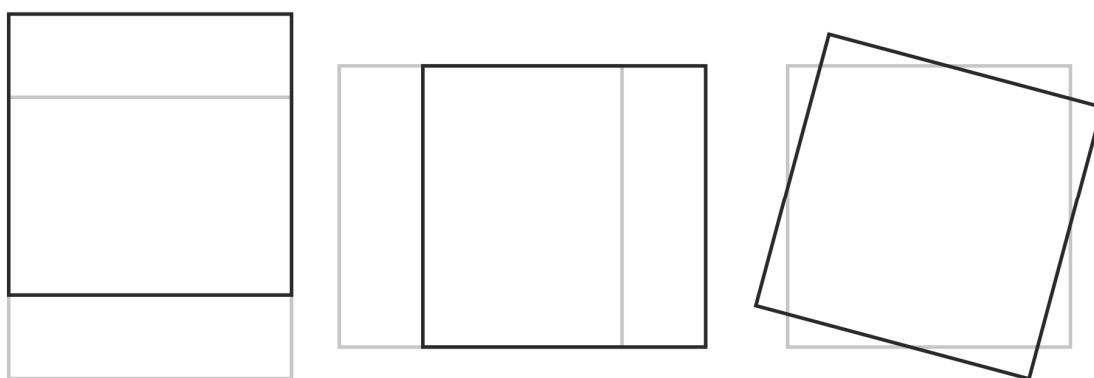
### 6.3. Hourglass effect

Hourglass effect, nebo-li efekt přesýpacích hodin, který může nastat u prvků s jedním integračním bodem. Snížením integračních bodů dosáhneme enormního urychlení výpočtu a tím i snížení celkového výpočtového času. Nicméně díky této úpravě, mohou vzniknout situace, které přesnost výsledku podstatně ovlivňují a mohou vést k ukončení výpočtu. Jev přesýpacích hodin si popíšeme na jednoduchém plošném čtyřuzlovém prvku, který má pro každý uzel dva stupně volnosti (Obrázek 6.1).



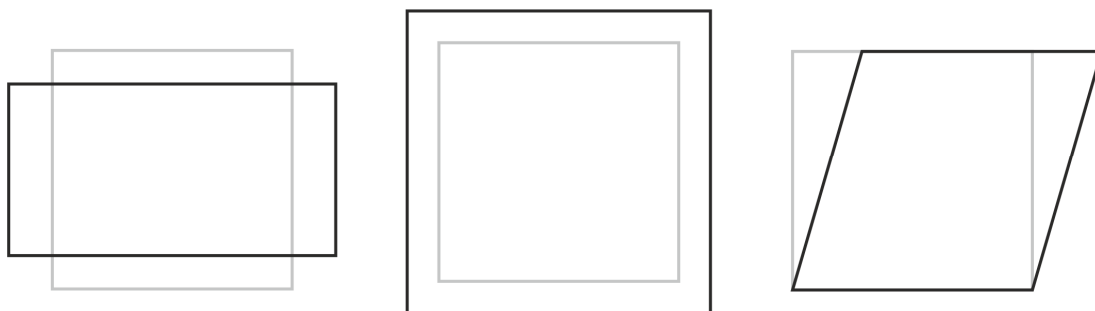
Obrázek 6.1 - Plošný čtyřuzlový prvek

Prvek osm stupňů volnosti, čímž může nastat osm možných deformačních stavů. Tři stavy lze přiřadit pohybu prvku jako tuhého celku (Obrázek 6.2).



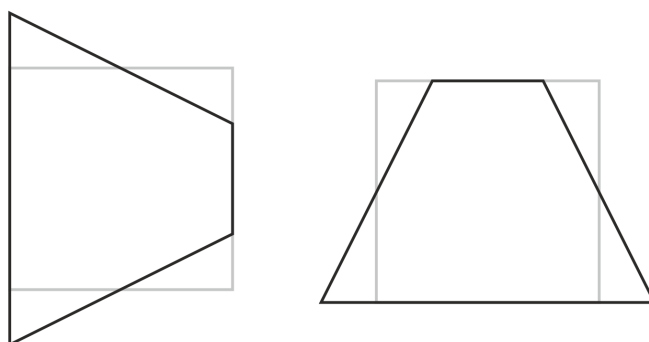
Obrázek 6.2 - Tři deformační stavy prvku - pohyb prvku jako tuhého celku

Dále mohou vzniknout tři deformační stavy, jež vykazují tuhost (Obrázek 6.3)



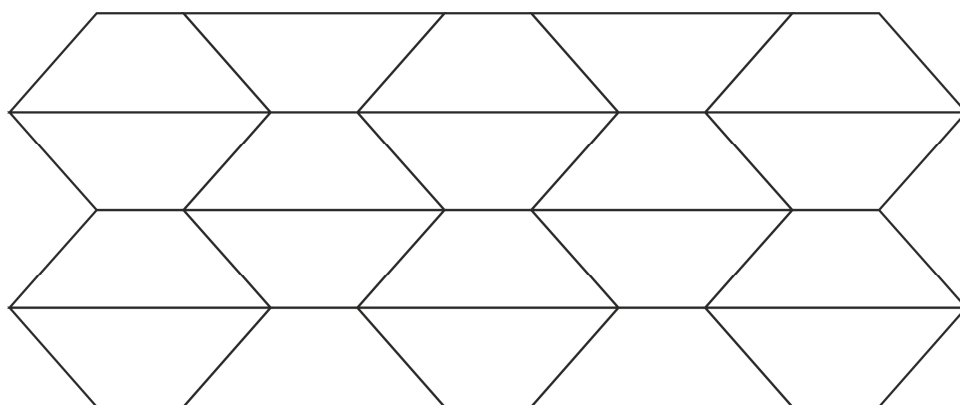
Obrázek 6.3 - Další tři deformační stavy prvku

Z celkových osmi stavů, zbývají vlivem jednoho integračního bodu dva. Tyto jsou nazývány jako stav přesýpacích hodin nebo také stavy s nulovou energií (Obrázek 6.4).



Obrázek 6.4 - Dva deformační stavy prvku - stav přesýpacích hodin

Tyto dva možné stavy, vedou k vlivem nulové energie k velkým nepřesnostem výpočtu. Díky těmto stavům, dochází k ovlivnění okolní oblasti (Obrázek 6.5) a následným numerickým problémům. Jev přesýpacích hodin může vzniknout u čtyřuzlových skořepinových prvků, pětiuzlových klínů a osmiuzlových kvádrů a to za předpokladu, že mají tyto prvky jeden centrální integrační bod. U tříuzlových trojúhelníků a čtyřuzlových čtyřstěnů tento jev vznikat nemůže.



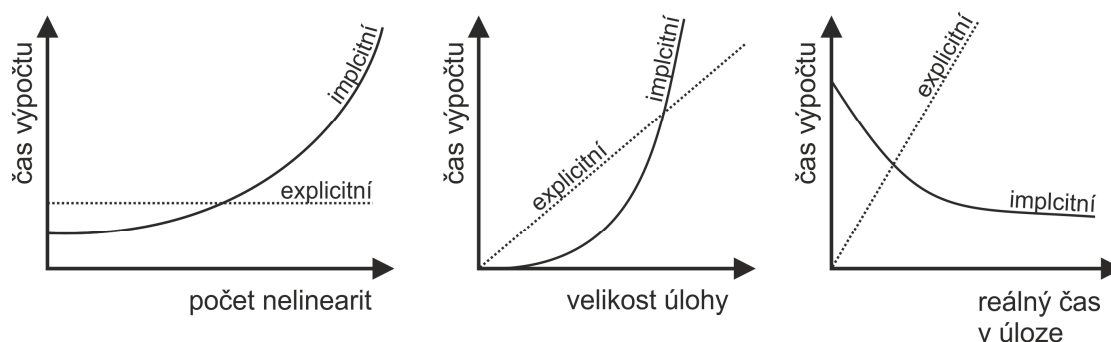
Obrázek 6.5 - Ovlivněná oblast efektem přesýpacích hodin



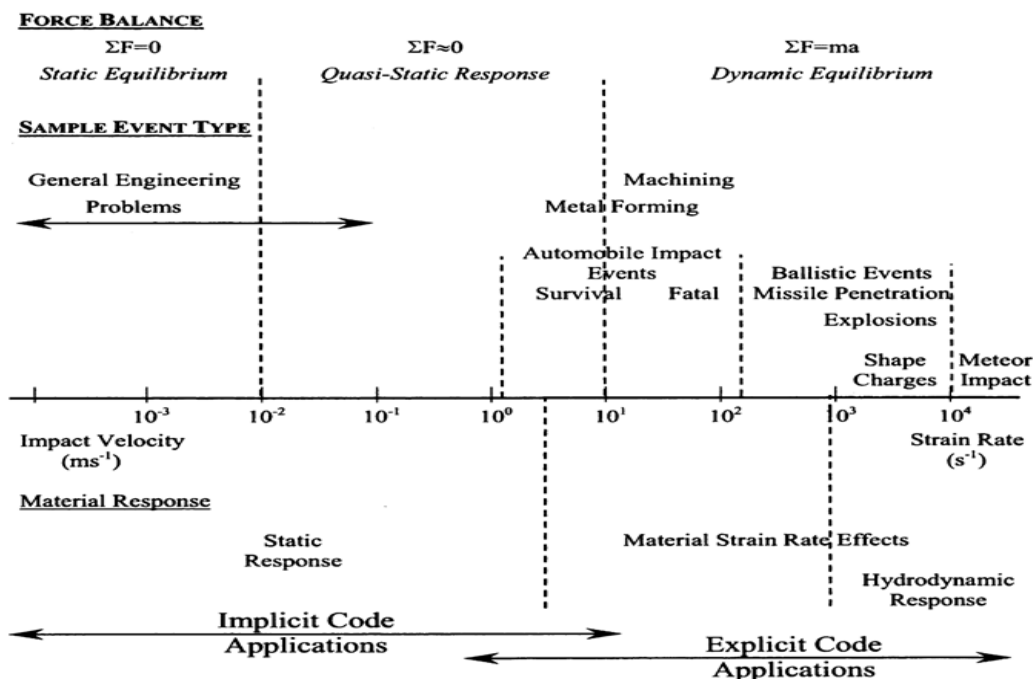
## 6.4. Porovnání implicitního a explicitního algoritmu

Rozdíl mezi jednotlivými algoritmy je zřejmý z předchozího výkladu. Explicitní algoritmus je podmíněně stabilní, což je důvodem velmi malého časového kroku, který je 100 až 1000 menší než v případech implicitního algoritmu. Tato vlastnost má své výhody a to například řešení nelinearit, kdy se snižují nároky na integraci kontaktních algoritmů či konstitučních rovnic materiálů. Řeší-li se úlohy kde dochází k velkým přetvořením nebo velmi rychlým dějům (výbuchy, crash testy, rázy, atp.) je výhodnější zvolit právě explicitní algoritmus. Na Obrázek 6.7 lze vidět výhodnost použití algoritmů pro dané oblasti.

Na Obrázek 6.6, jsou vyobrazeny grafy, popisující závislost délky výpočtu na typu "komplikace" úlohy pro jednotlivé algoritmy.



Obrázek 6.6 - Přehled rozdílů mezi algoritmy v závislosti na "komplikaci" úlohy

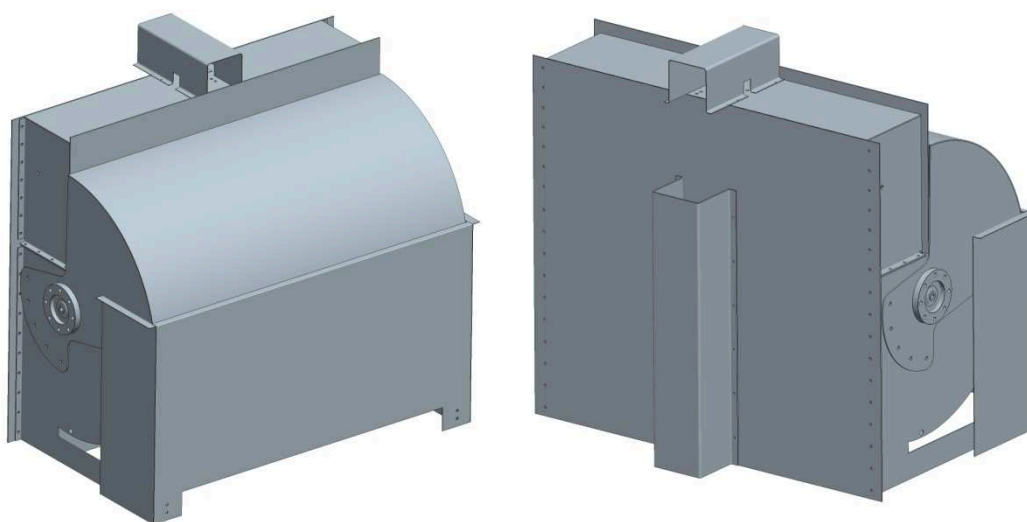


Obrázek 6.7 - Oblast použití jednotlivých algoritmů [14.]

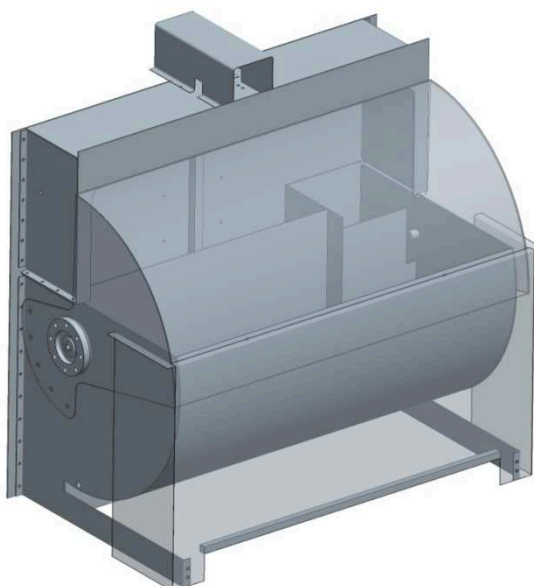
## 7. Vlastní řešení

### 7.1. Popis modelu

Předmětem napětově-deformační analýzy je zařízení určené pro kontrolu tlakových láhví o objemu  $0,03\text{ m}^3$ . Láhve se kontrolují na těsnost, průběh zkoušky tlakové láhve bude popsán níže. Jednotlivé části zařízení jsou tvořeny plechy, které jsou navzájem spojeny šrouby. Plechy jsou zhotoveny z korozi-vzdorné oceli s označením 1.4301. Zařízení je volně položeno na podlaze.



Obrázek 7.1 - Zkušební zařízení pro kontrolu tlakových láhví



Obrázek 7.2 - Pohled na zkušební zařízení s transparentním krytem

Láhev je vložena do zkušebního zařízení, ponořena do kapaliny a postupně natlakována až na hodnotu vnitřního přetlaku 6 MPa. Pozorováním následuje kontrola těsnosti, zda-li se kolem láhve netvoří vzduchové bublinky, jenž mohou být tvořeny unikajícím vzduchem z láhve. Dalším krokem je odtlačování a vyjmutí láhve ze zkušebního zařízení.

V případě narušené struktury láhve (vlivem špatně provedených svarů, poruchy materiálu, netěsnosti láhve, atd.) může dojít k roztržení nádoby a následné prudké expanzi stlačeného vzduchu. Díky této skutečnosti, bude konstrukce zkušebního zařízení vystavena rázovému zatížení.

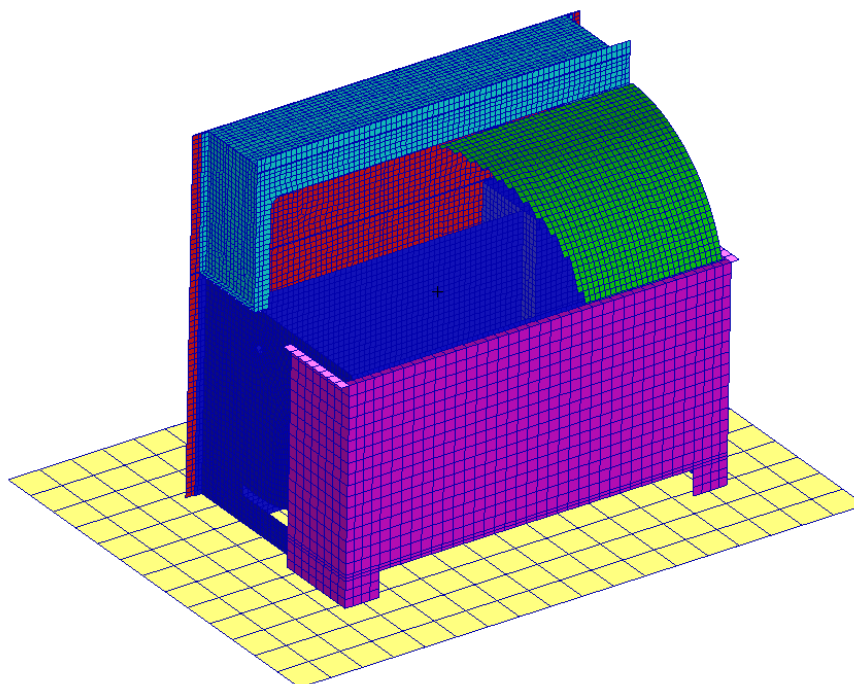
## 7.2. Výpočtový model

Na základě dodaného geometrického modelu, byl v prostředí MSC Patran 2012 vytvořen model matematický (Obrázek 7.3). Model zkušebního zařízení je složen z několika druhů prvků:

- Čtyřuzlové skořepinové prvky
- Tříuzlové skořepinové prvky
- Dvouuzlové nosníkové prvky
- Absolutně tuhé prvky

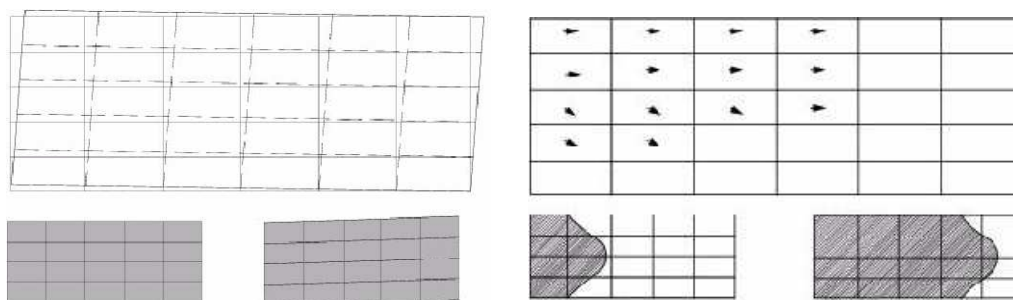
Skořepinovými prvky jsou modelovány plechové části. Hlavním parametrem skořepin je tloušťka. Z tohoto důvodu, musel být geometrický model vhodně upraven. U všech plechových částí musela být nalezena střednice, která byla následně upravena (odstranění malých děr, radiusů, atp.). Šroubové spoje byly modelovány pomocí nosníkových prvků, jimž byly přiřazeny průřezové charakteristiky. Dále byly odstraněny některé komponenty zařízení, které nejsou pro výpočet důležité. Absolutně tuhými prvky bylo nahrazeno spojení otočných kloubů přírub a krytu, které jsou mnohem tužší než zbytek konstrukce.

Problematika výbuchu tlakové láhve a následné zatížení konstrukce, bude řešeno tzv. kombinovanou úlohou (anglicky "coupled"). Děj výbuchu bude počítán zvláštním řešičem (Eulerovským), který bude spuštěn souběžně s řešičem (Lagrangeovský) starajícím se o stanovení deformačně-napětových polí na zkušebním zařízení. Výsledky z obou řešení jsou vzájemně svázány a navzájem se ovlivňují.



Obrázek 7.3 - Matematický model

Toto řešení má své specifika. Lagrangeovský řešič napětovo-deformčních polí, počítá s uzly, které tvoří konečnoprvkovou síť, jež kopíruje tvar tělesa. Vlivem zatížení, formulace prvku a materiálu dochází k posuvu uzlů a tedy deformaci této sítě. Eulerovský řešič počítá se sítí, která je v prostoru pevná a neměnná, materiál "teče" z elementu do elementu uvnitř této sítě (Obrázek 7.4).



Obrázek 7.4 - Lagrangeovská síť (vlevo), Eulerovská síť (vpravo) [5.]

Aby bylo možné jednotlivé výsledky spolu svázat, je nutné aby byl prostor, v němž bude výbuch a následná expanze stlačeného vzduchu probíhat, uzavřen. V našem případě toho však není dodrženo, proto je nutné jednotlivé mezery vyplnit elementy, které nemají žádné fyzikální vlastnosti a slouží pouze pro uzavření objemu. Další podmínkou je, aby Eulerovská síť obklopovala celé těleso a to i jeho deformaci.

Výpočty budou prováděny softwarem MSC Dytran 2012.

### 7.3. Materiálové modely

Pro správné řešení a získání relevantních výsledků, jsou důležité definovat správné chování jednotlivých materiálů. Jak už bylo zmíněno v popisu modelu, zkušební zařízení je vyrobeno z korozivzdorného materiálu 1.4301. Výbuch je reprezentován expanzí stlačeného vzduchu pod vodní hladinou a následného přechodu do volného prostředí.

#### 7.3.1. Korozivzdorná ocel 1.4301

Materiálový model korozivzdorné oceli je získán z literatury [13.]. Křivka závislosti napětí-deformace (graf 1) je popsána Ramberg-Osgoodovými rovnicemi, jež byly probrány v kapitole 4.1. pro připomenutí mají rovnice (4.2) a (4.12) tvar

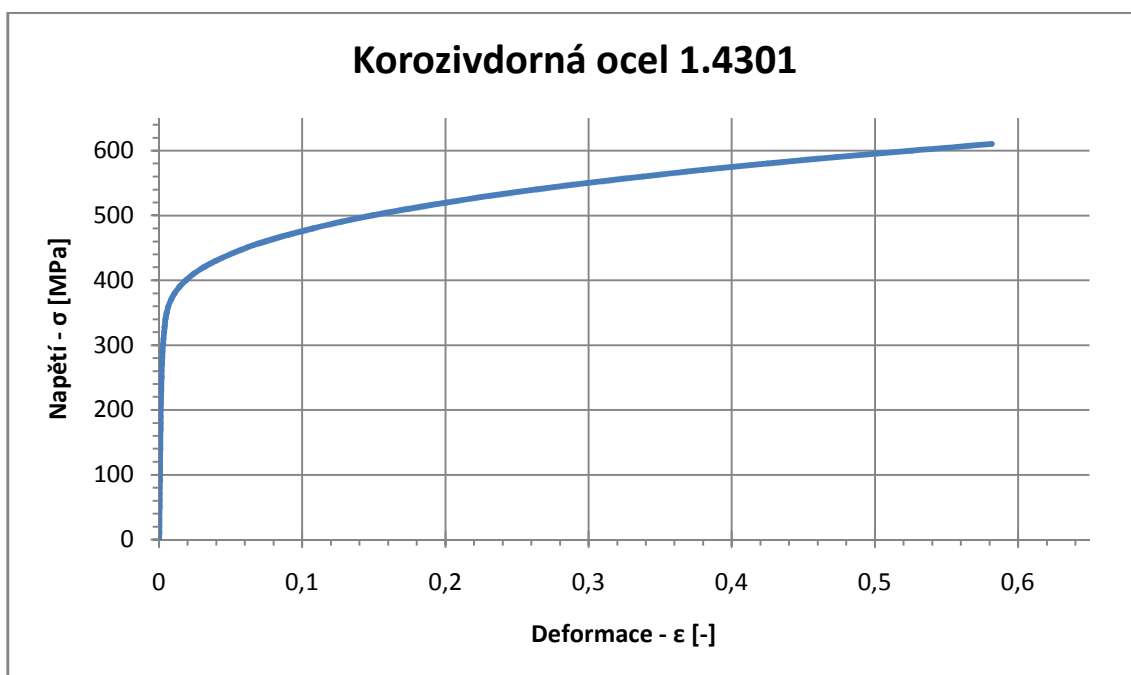
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} + 0,002 \left( \frac{\sigma}{\sigma_{0,2}} \right)^n \quad \text{pro } \sigma \leq \sigma_{0,2}, \quad (4.2)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma - \sigma_{0,2}}{E_{0,2}} + \varepsilon_u \left( \frac{\sigma - \sigma_{0,2}}{\sigma_u - \sigma_{0,2}} \right)^m + \varepsilon_{0,2} \quad \text{pro } \sigma > \sigma_{0,2}. \quad (4.12)$$

Hodnoty koeficientů jsou shrnuty v tabulce 2.

$E_0$ [MPa]	$E_{0,2}$ [MPa]	$\sigma_{0,2}$ [MPa]	$\sigma_u$ [MPa]	$\varepsilon_{0,2}$ [-]	$\varepsilon_u$ [-]	$n$ [-]	$m$ [-]
190 000	20 573	327	611	0,0037	0,57	7	2,87

Tabulka 2 - Přehled koeficientů pro Ramberg - Osgoodovy rovnice



Graf 1 - Diagram závislosti na napětí na deformaci pro korozivzdornou ocel 1.4301

Jednotlivé hodnoty sloužící jako podkladová pro graf 1 jsou součástí příloh.

Na takto popsanou křivku závislosti je dále aplikován Cowper - Symondsův model pro zahrnutí rychlosti deformace jež popsán rovnicí (5.2)

$$\frac{\sigma'_0}{\sigma_0} = 1 + \left(\frac{\dot{\epsilon}}{D}\right)^{1/q}, \quad (5.2)$$

hodnoty koeficientů jsou shrnuty v tabulce 3

<b>D [s<sup>-1</sup>]</b>	<b>q</b>
40,4	5

**Tabulka 3 - Koeficienty pro Cowper - Symondsův model**

### 7.3.2. Model prostředí

Pro modelování okolního prostředí byla, použita teorie ideálního plynu (dokonalá stlačitelnost, bez vnitřního tření). Vzduch je tedy definován hustotou a hodnotou vnitřní energie. Použité hodnoty jsou převzaty z [4.]

<b>Hustota [kg · m<sup>-3</sup>]</b>	<b>Vnitřní energie [J]</b>
1,29	1,9385 · 10 <sup>5</sup>

**Tabulka 4 - Použité hodnoty pro model okolní prostředí**

### 7.3.3. Model stlačeného vzduchu - výbušniny

Výbušnina, nebo-li stlačený vzduch uvnitř láhve je modelován taktéž za použití teorie ideálního plynu. Vnitřní přetlak v láhvi 6 MPa se dá modelovat zvýšenou hustotou a zvýšenou vnitřní energií vzhledem k okolnímu prostředí. Pro určení těchto hodnot, byly využity rovnice termomechaniky. Objem tlakové láhve je 0,03 m<sup>3</sup>. Algoritmus pro stanovení veličin lze nalézt v příloze.

<b>Hustota [kg · m<sup>-3</sup>]</b>	<b>Vnitřní energie [J]</b>
64,7	4,501 · 10 <sup>5</sup>

**Tabulka 5 - Použité hodnoty pro model výbušniny**

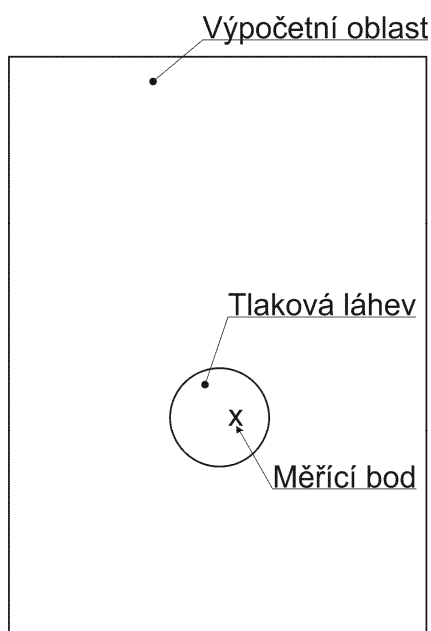
#### 7.4. Zkušební úloha

Než bude řešena vlastní úloha kontroly zkušebního zařízení, je řešena zkušební úloha předpokládající nejhorší možný stav zatížení. Je to situace, kdy se ve zkušebním zařízení nenachází žádná voda, čímž nedochází k žádnému snížení tlaku expandujícího plynu.

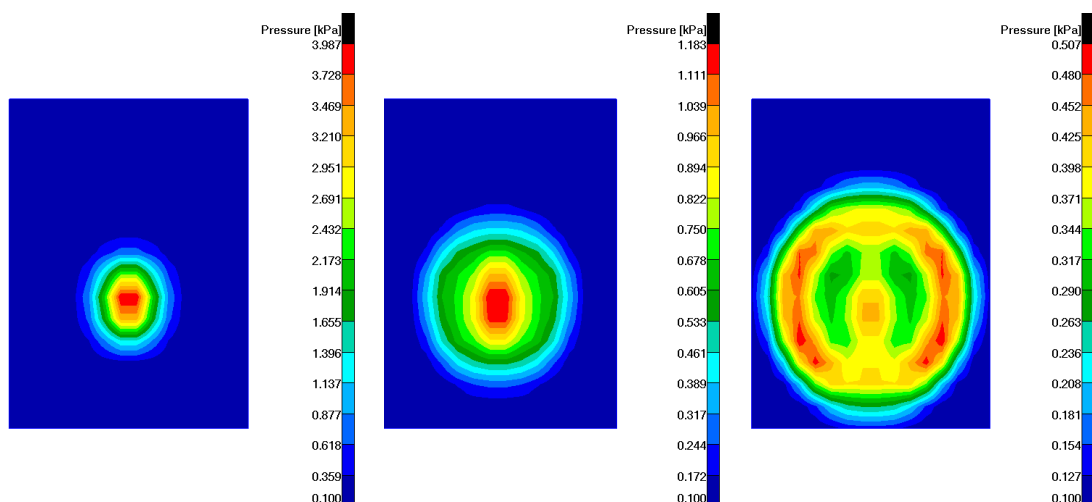
V modelové úloze je řešena expanze stlačeného vzduchu do okolního prostředí, jež je tvořeno pouze vzduchem. V souvislosti s kapitolou 2.2. Rozdělení problému výbuchu, je uvažováno řešení vnějšího problému, kdy výbušnina je plně zreagovaná, zažehnutá a řeší se pouze účinky výbuchu na okolní prostředí. Hodnoty pro použité materiálové modely byly zmíněny v předchozí podkapitole.

Velikost výpočetní oblasti má stejné rozměry jako oblast pro řešení vlastního problému. Počátek expanze stlačeného vzduchu lze pozorovat na Obrázek 7.5 . Z časového hlediska dochází k expanzi (výbuchu) ihned i prvním kroku. Průběh tlaku bude odečítám v měřícím bodě.

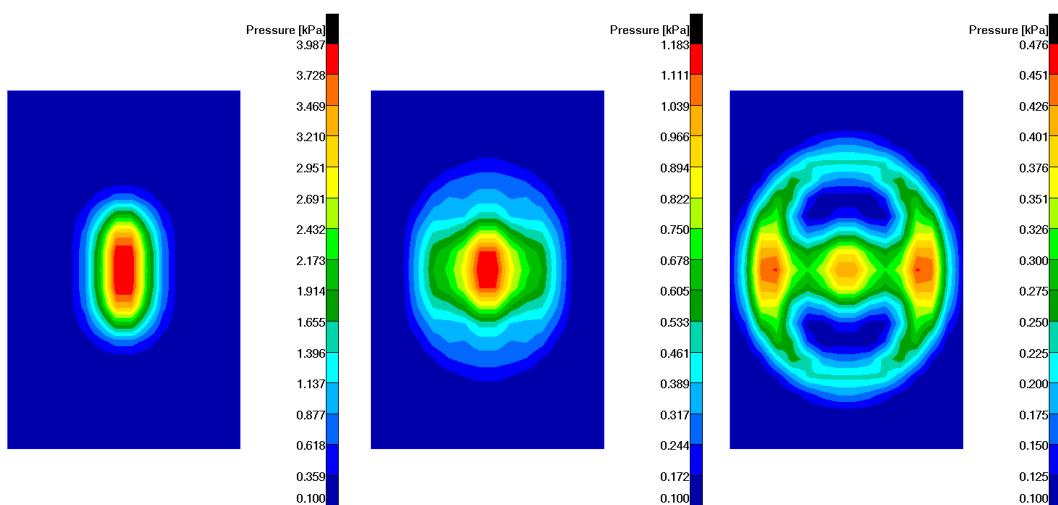
Aby bylo možné pozorovat šíření tlaku, bude část výpočtové oblasti odebrána.



Obrázek 7.5 - Schéma modelové úlohy



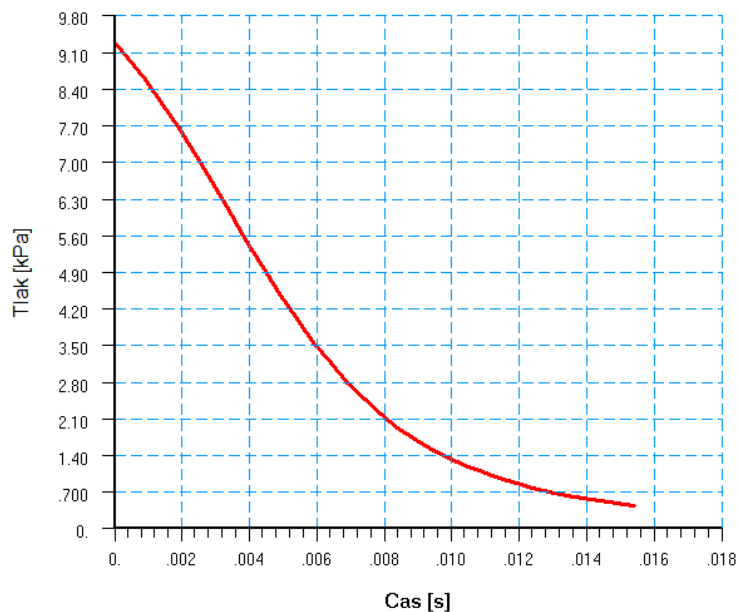
Obrázek 7.6 Expanze stlačeného plynu v čase 5 ms (vlevo), 10 ms (uprostřed), 15 ms (vpravo), pohled z boku



Obrázek 7.7 - Expanze stlačeného plynu v čase 5 ms (vlevo), 10 ms (uprostřed), 15 ms (vpravo), pohled z vrchu



## Průběh tlaku při expanzi plynu



Graf 2 - Průběh tlaku při expanzi pro čas 0 - 15 ms

Z grafu 2 lze jasně vidět, že při expanzi dochází k prudkému poklesu tlaku v daném měřicím bodě. Na Obrázek 7.6 a 7.7 lze pozorovat expanzi vzduchu a následné šíření tlakové vlny. Pro lepší odečítání jsou tlaky převedeny na kilopascaly.

### 7.5. Okrajové a počáteční podmínky

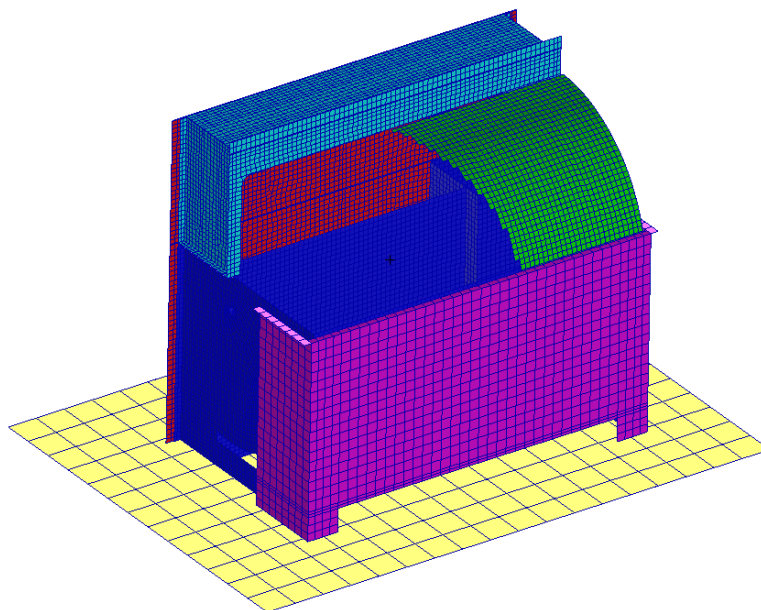
Jak již bylo poznamenáno v předchozí podkapitole, vlastní úloha bude řešena pro nejhorší možný stav zatížení. Ten nastane v případě, kdy nádrž na vodu bude plně odčerpána a tlaková vlna narazí přímo na stěny zkušebního zařízení.

Zkušební zařízení je volně položeno na podlaze, tato skutečnost je do výpočtu zahrnuta a řešena pomocí kontaktního algoritmu.

Zatížení od expanze stlačeného vzduchu je řešeno stejně, jako v případě zkušební úlohy. Počátek šíření tlaku je umístěn uprostřed nádrže na vodu.

Aby během výpočtu nedošlo k vzájemnému prostupu jednotlivých komponent mezi sebou, je těmto komponentám přiřazeno kontaktní nastavení. Kontaktní páry lze vidět na Obrázek 7.8, kde jsou jednotlivé páry od sebe barevně odlišeny.

Na výpočtový model zkušebního zařízení, bylo také aplikováno gravitační zrychlení s hodnotu  $9,81 \text{ m/s}^2$ .



Obrázek 7.8 - Barevné rozlišení kontaktních párů

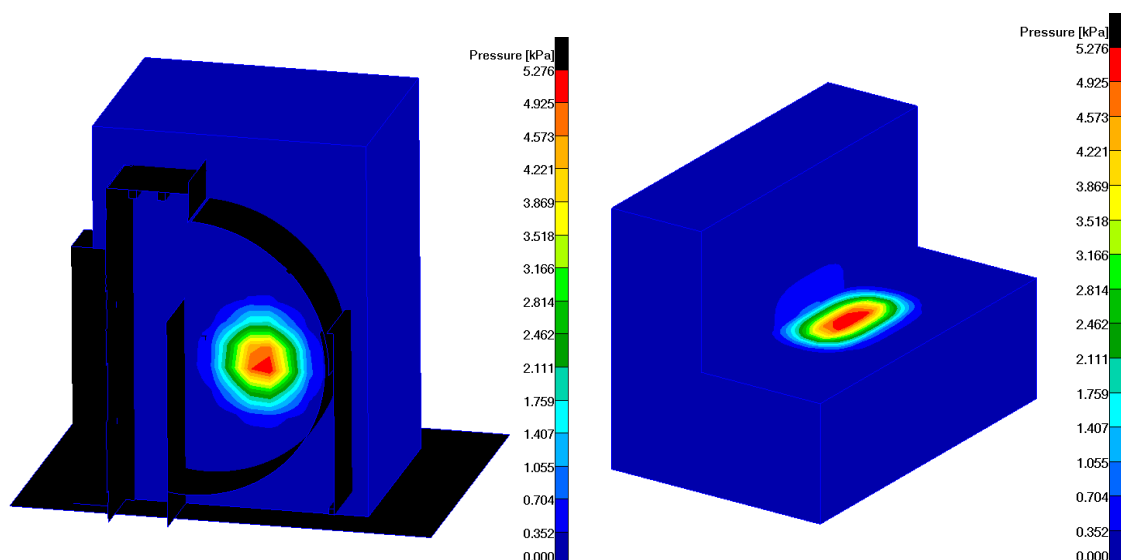
Hodnoty minimální, maximální a prvotního časového kroku byly voleny takto:

- Prvotní krok:  $t_{initial} = 1 \cdot 10^{-7} s$
- Minimální hodnota časového kroku:  $t_{min} = 1 \cdot 10^{-9} s$
- Maximální hodnota časového kroku:  $t_{max} = 1 \cdot 10^{-5} s$

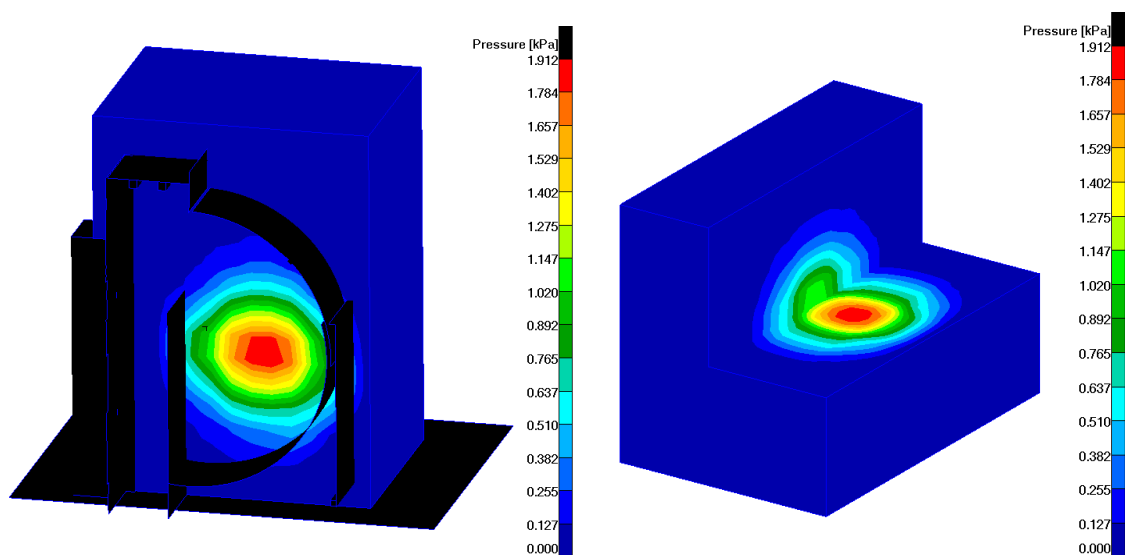
Končený čas analýzy byl stanoven na hodnotu 0,2 s.

## 7.6. Výsledky

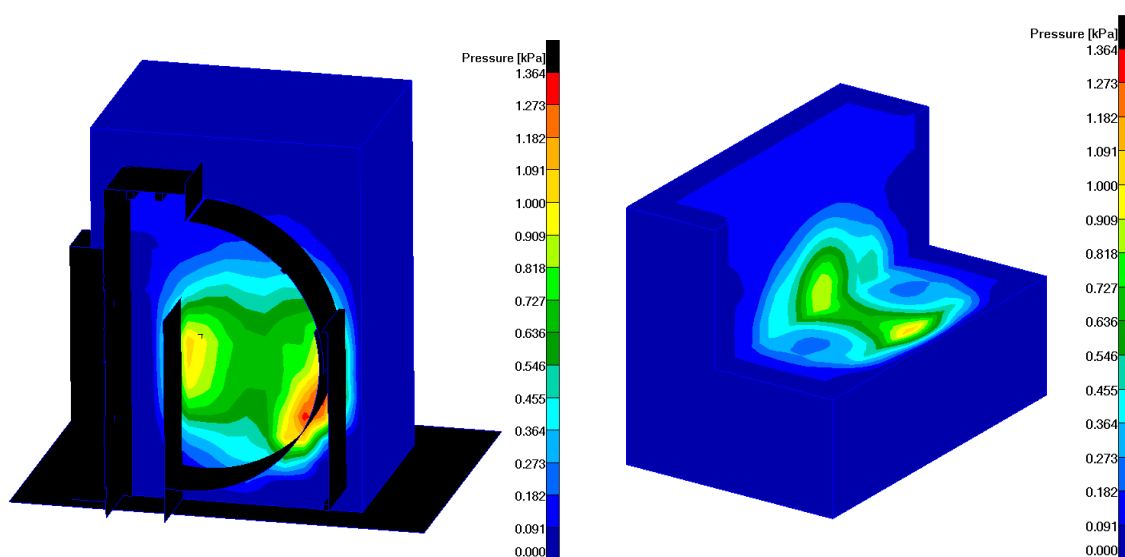
Vyhodnocení a popis výsledků bude níže provedeno graficky a doplněno komentáři. Nejprve bude vyhodnoceno chování expandujícího vzduchu, dále účinky tohoto zatížení na zkušební zařízení.



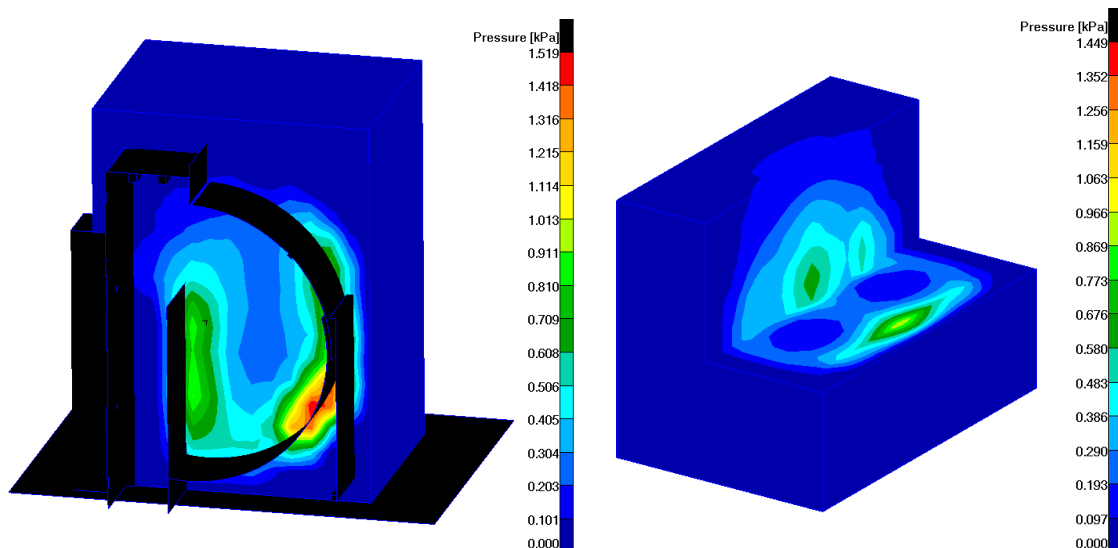
Obrázek 7.9 - Expanze stlačeného vzduchu v 5 ms



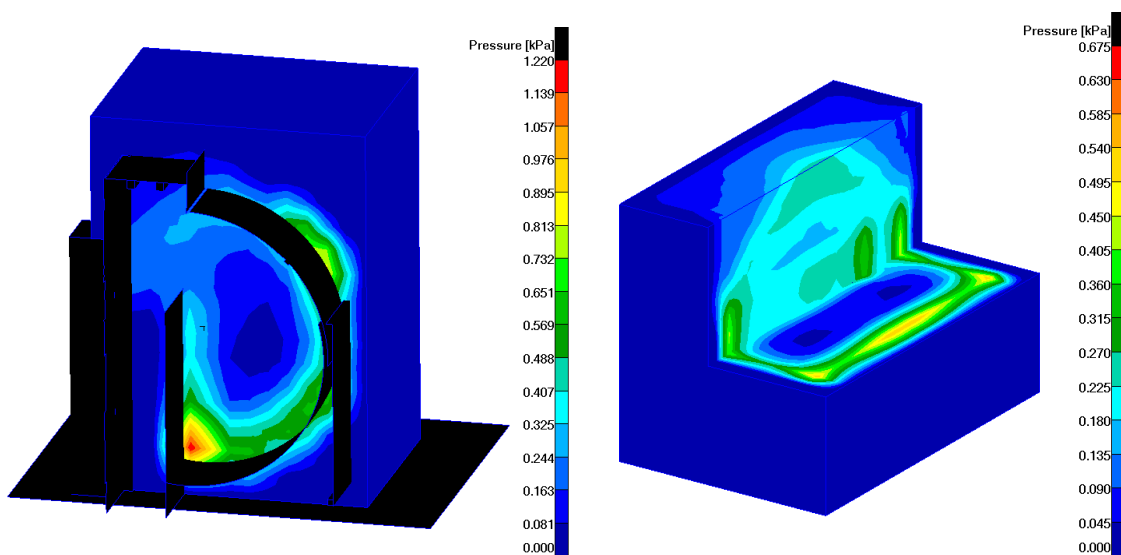
Obrázek 7.10 - Expanze stlačeného vzduchu v 10 ms



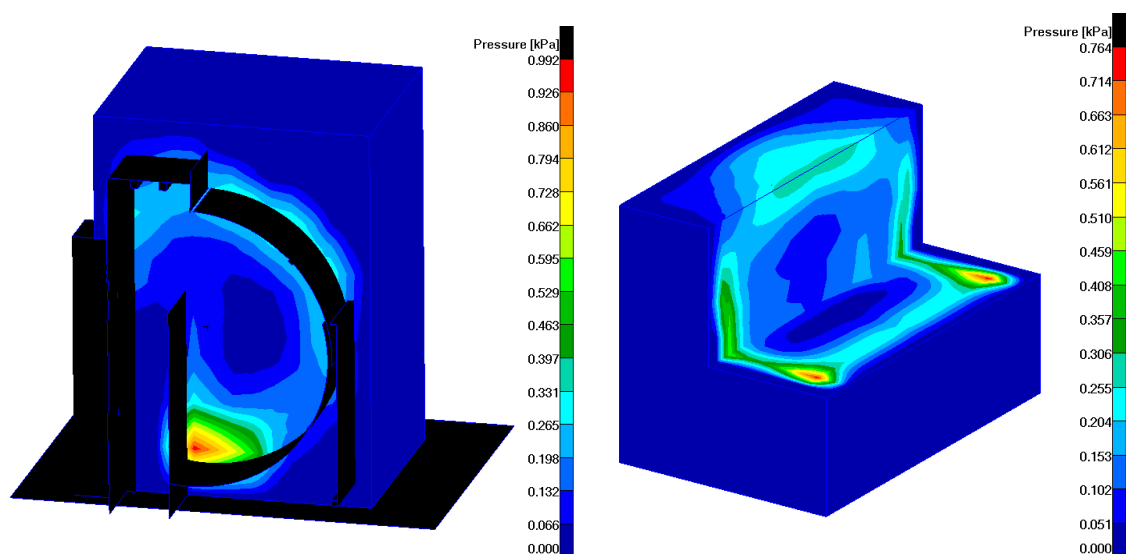
Obrázek 7.11 - Expanze stlačeného vzduchu v 15 ms



Obrázek 7.12 - Expanze stlačeného vzduchu v 20 ms



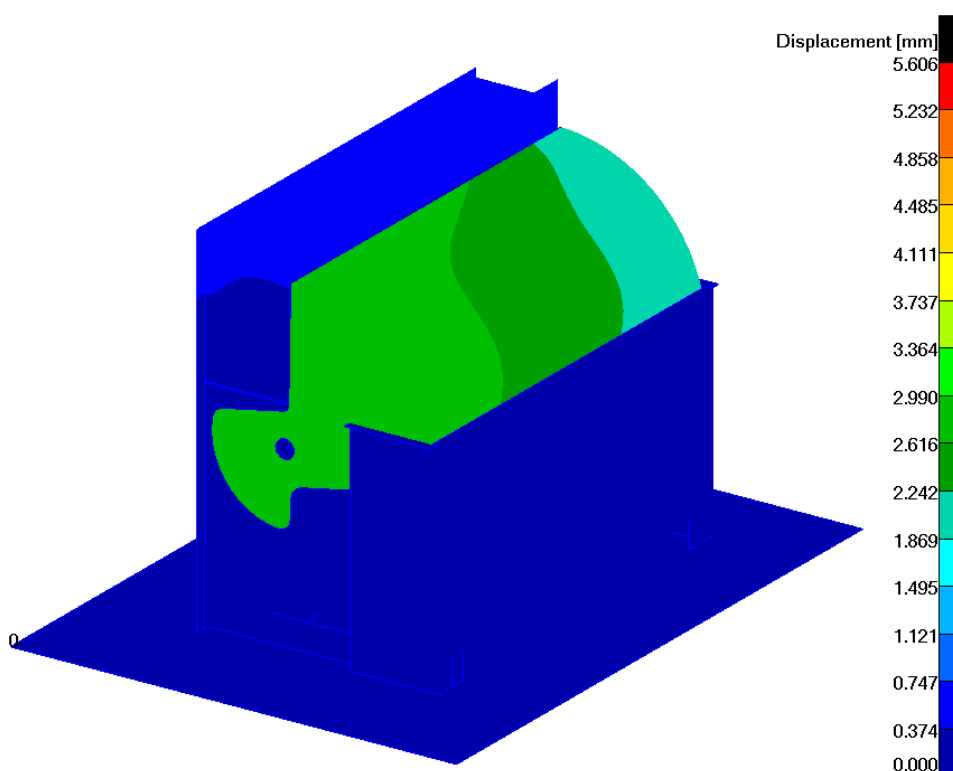
Obrázek 7.13 - Expanze stlačeného vzduchu v 30 ms



Obrázek 7.14- Expanze stlačeného vzduchu v 40 ms

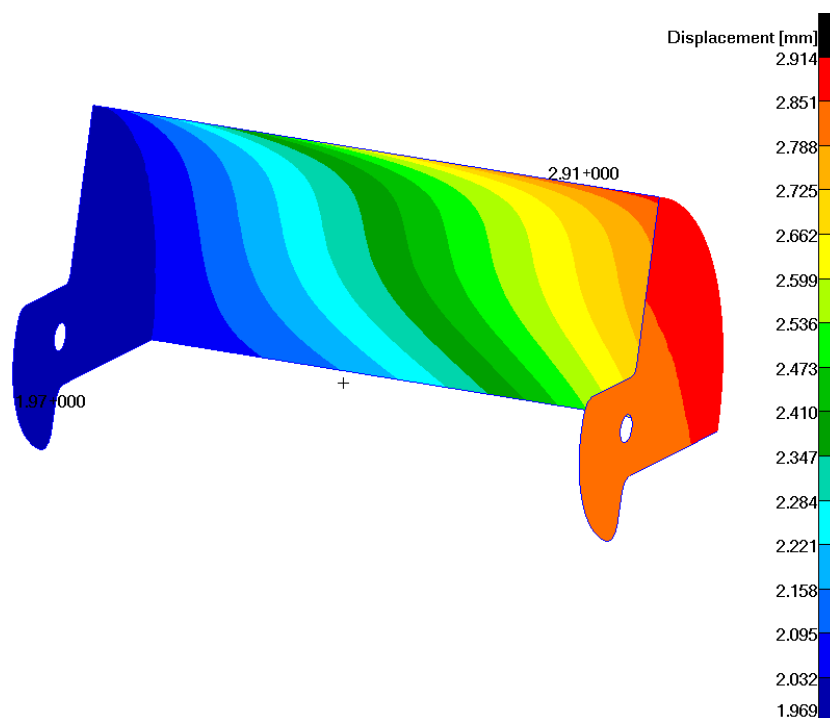
Na obrázcích 7.9 - 7.14, lze vidět expanzi stlačeného vzduchu a jeho šíření ve zkušebním zařízení. Průběh expanze vzduchu koresponduje s výsledky modelové úlohy. Obrázky 7.12 a 7.14 pěkně demonstrují, jak se tlaková vlna zastaví o stěny zařízení. V čase od 40 ms výše, už dochází pouze k odražení vln uvnitř zkušebního zařízení. Nejvyšší tlak 1,5 kPa působící na stěnu, je v čase 20 ms.

Jak již bylo zmíněno v předchozích kapitolách, rychlost šíření napěťové vlny není stejná jako rychlost pohybu hmoty, proto budou výsledky posuvů a napětí časově posunuty. Toto má za následek, že maxima bude dosaženo v jiném časovém okamžiku, než v kterém působí maximální zatížení. K tomuto dojde v čase 38 ms.

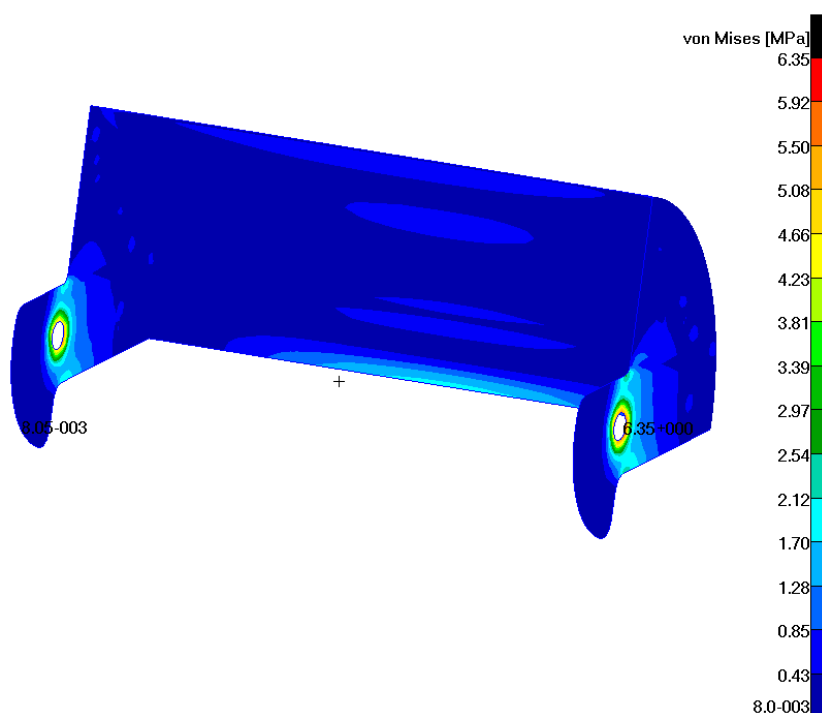


Obrázek 7.15 - Posuvy na zkušebním zařízení v čase 38 ms

Z důvodu lepší názornost, bude zvlášť vyhodnocen kryt a zbytek zařízení.

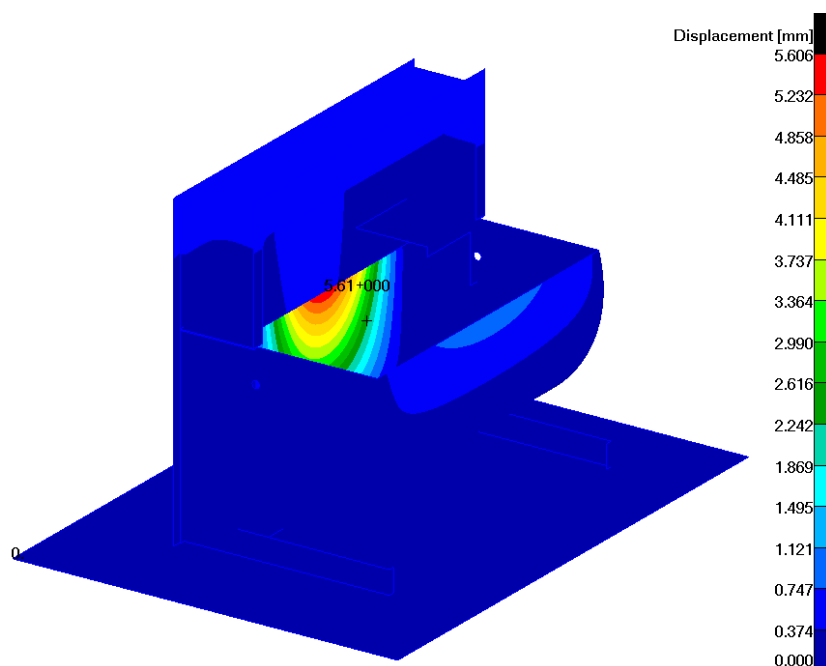


Obrázek 7.16 - Posuvy na krytu zkušebního zařízení v čase 38 ms.

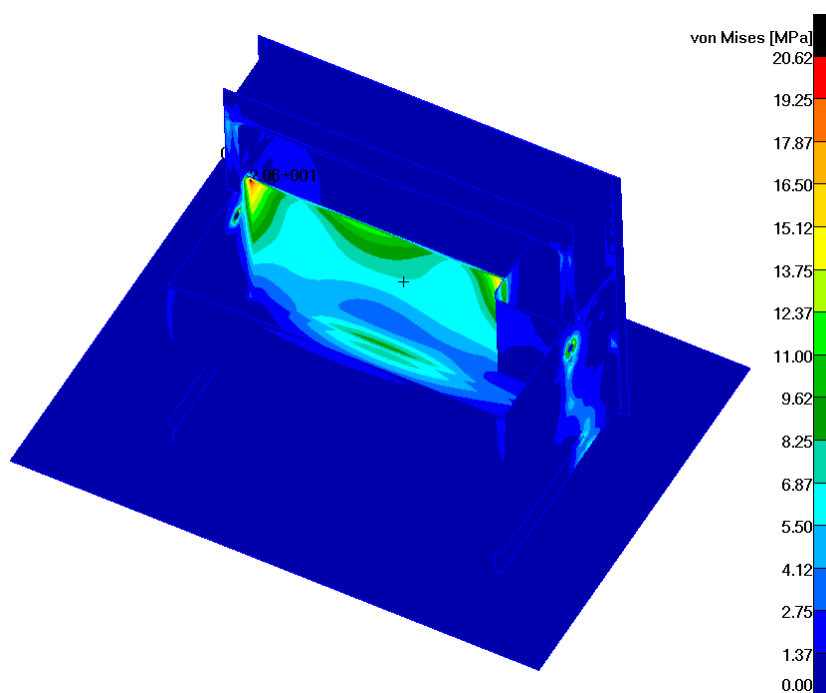


Obrázek 7.17 - Průběhy napětí na krytu zkušebního zařízení v čase 38 ms.

Z obrázků 7.16 a 7.17, lze vyčíst maximální hodnoty posunutí a napětí na krytu zkušebního zařízení. Maximální velikost posunutí má hodnotu 2,9 mm. Nejvyšší napětí je dosaženo na bocích, v místech spojení krytu s přírubou a má hodnotu 6,35 MPa. V čelní části hodnota napětí nepřekročí 2 MPa.



Obrázek 7.18 - Posuvy na zkušebním zařízení (bez krytu) v čase 38 ms



Obrázek 7.19 - Průběhy napětí na zkušebním zařízení (bez krytu) v čase 38 ms

Největšího posuvu je dosaženo v místě zadní přepážky nádrže, jeho hodnota je 5,6 mm. Maximální napětí vzniká místě spojení zadní přepážky a boku zařízení. Jeho hodnota je 20,6 MPa. V místě největšího průhybu zadní přepážky, dosahuje hodnota napětí 12 MPa. S přihlédnutím k mezi kluzu materiálu, určené z tahové zkoušky, má hodnotu 327 MPa. Lze konstatovat, že vlivem prudké expanze stlačeného vzduchu, nedojde k porušení zkušebního zařízení.

## 8. Závěr

Předmětem diplomové práce, bylo provést výpočet protivýbuchového zařízení, jež slouží pro kontrolu tlakových láhví. Dojde-li k roztržení láhve, nastane prudká expanze stlačeného vzduchu uvnitř láhve. V případě špatně navržené konstrukce zařízení, může dojít k ohrožení obsluhy.

V úvodu teoretické části, byla popsána teorie výbuchu, příklady výbuchu a jeho rozdělení dle druhu problému. Dále byl popsán vliv okolního prostředí na průběh výbuchu a následné šíření rázové vlny. Rozpracovaná byla i teorie napětíových vln, vznikajících při výbuchu a jejich rozdělení dle povahy. Další velkou kapitolou, jež se tato práce zabývala, jsou rázové děje a jednotlivé teorie řešení. U Stereostatické nebo-li Newtonovy teorie, byl probrán příklad rázu dvou koulí s uvážením koeficientu restituace a jeho vlivu na výsledné řešení. Ráz dvou koulí, byl následně řešen také pokročilejší Hertzovou teorií, která řeší nedokonalosti předchozí metody. Jako poslední teorie řešící ráz těles, byla popsána vlnová teorie rázu, jež byla aplikovaná na zjednodušený příklad šíření vlny v prismatickém nosníku.

Následující kapitola popisovala plastické chování materiálu s výčtem několika materiálových modelů. Pro účely této práce a pozdější použití, byl rozepsán mechanismus Ramberg-Osgoodova materiálového modelu. Na závěr této kapitoly, bylo pojednáno o zpevňování materiálu a jeho výpočtových modelech. Kapitola 5. Rychlé děje z hlediska materiálu, zmiňovala vliv rychlosti zatížení (deformace) na chování materiálu. Byl proveden výčet některých materiálových modelů, v nichž je problematika rychlosti deformace zahrnuta.

Poslední kapitola pojednávala o metodě konečných prvků a dvou algoritmech používaných pro její řešení. Oba algoritmy byly rozepsány s uvedením jejich přínosů či úskalí z pohledu výpočtu. Rozepsána byla také problematika "Hourglass effectu", který může vést k nepřesnostem výsledků či zkolabování výpočtu. Závěr kapitoly patřil srovnání implicitního a explicitního algoritmu.

V praktické části byl popsán model zařízení a průběh zkoušky tlakové láhve. Stať o výpočtovém modelu popisovala z jakých prvků je matematický model složen a podala krátký výklad o metodě řešení úlohy. Důležitou částí pro správný výpočet, je sestavení korektních modelů chování materiálu. Z hlediska zatížení, byl uvažován nejkritičtější scénář a to roztržení láhve v případě, kdy je voda z nádrže plně odčerpána.



Následně byla vypracována jednoduchá modelová úloha, jež sloužila pro ověření chování a zjištění průběhu tlaků při expanzi vzduchu.

Na základě poznatků z modelové úlohy, byl doladěn matematický model zkušebního zařízení, aplikovány okrajové podmínky a nastavení řešiče.

Po úspěšném proběhnutí analýzy, která trvala 20 hodin, byly vyhodnoceny výsledky. Ty byly prezentovány graficky s doplňujícím komentářem. Nejprve byly zobrazeny výsledky chování expandujícího plynu pro určité časy výpočtu. Následně vyhodnoceia vlastní konstrukce zkušebního zařízení. Výsledky jsou shrnuty v tabulce níže.

Místo	Maximální posunutí	Maximální napětí
Přední kryt - boční část	2,9 mm	6,35 MPa
Přední kryt - čelní část		Do 2 MPa
Zadní přepážka nádrže	5,6 mm	20,6 MPa
Napojení přepážky		Do 12 MPa

Tabulka 6 - Shrnutí výsledků

Při shlednutí výsledků uvedených v tabulce, lze konstatovat, že při roztržení tlakové láhve nedejde k ohrožení obsluhy zkušebního zařízení.

Tuto úlohu lze dále rozvíjet, například s uvažováním vody v nádrži, zahrnutí střepin tlakové láhve. Nicméně tato zpřesnění vedou k neúměrnému nárůstu časové náročnosti výpočtu a to hlavně díky potřebě delšího času analýzy (v řádech sekund).

## Přehled použité literatury

- [1.] **HENRYCH, Josef.** *Dynamika výbuchu a její užití v praxi.* Praha : Academia, 1973. 509-21-875.
- [2.] **JONES, Norman.** *Structural Impact.* Cambridge : Cambridge University Press, 1989. 0-521-62890-3.
- [3.] **MSC Software.** *Dytran 2012 - Reference Manual.* Santa Ana : The MacNeal - Schwendler Corporation, 2012.
- [4.] **MSC Software.** *Dytran 2012 - Example problem manual.* [2012] Santa Ana : The MacNeal - Schwendler Corporation.
- [5.] **MSC Software.** *Dytran 2012 - Theory.* Santa Ana : The MacNeal - Schwendler Corporation.
- [6.] **MSC Software.** *Dytran 2012 - User guide.* Santa Ana : The MacNeal - Schwendler Corporation, 2012.
- [7.] **MSC Software.** *MSC NASTAN 2012 - Demonstration problems.* Santa Ana : The MacNeal - Schwendler Corporation, 2012.
- [8.] **FUSEK, Martin a HALAMA, Radim.** MKP a MHP. [Online] 2011. [Citace: 16. 5 2012.] [http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/metoda\\_konecných\\_prvku\\_a\\_hranicnich\\_prvku.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/metoda_konecných_prvku_a_hranicnich_prvku.pdf).
- [9.] **LENERT, Jiří.** *Úvod do metody konečných prvků.* Ostrava : VŠB - Technická univerzita Ostrava, 1999. 80-7078-686-8.
- [10.] **PĚŠINA, Eugene.** *Základy užití teorie plasticity.* Praha : Státní nakladatelství technické literatury, 1966. 04-016-66.
- [11.] **HÖSCHL, Cyril.** *Rázová pevnost těles.* Praha : ČTVS - Dům techniky Praha, 1977. 60-510-77.

- [12.] **KREJSA, Martin, LAUSOVÁ, Lenka a MICHALCOVÁ, Vladimíra.**  
 Pružnost a plasticita. [Online] 2012. [Citace: 16. 5 2013.]  
[http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/pruznost\\_tisk.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/pruznost_tisk.pdf).
  
- [13.] **RASMUSSEN, Kim.** *Full-range Stress-strain Curves for Stainless Steel Alloys*. Sydney : The University of Sydney, 2001.
  
- [14.] **MSC Software.** *Explicit transient dynamic analysis*. Santa Ana : The MacNeal - Schwendler Corporation, 205.
  
- [15.] **BREPTA, Rudolf.** *Rázy a vlny napětí v pevných elastických tělesech*. Praha : Vydavatelství ČVUT, 1976.
  
- [16.] **SCHWER, Len.** *Optional Strain-Rate Forms for the Johnson Cook Constitutive Model and the Role of the Parameter Epsilon\_0<sup>l</sup>*. Windsor: Schwer Engineering & Consulting Services,
  
- [17.] **KADLEC, Zdeněk.** *Termomechanika*. Ostrava [Online] 2001.  
 [Citace: 16. 5 2013.]  
<http://www1.vsb.cz/ke/vyuka/Termo/Termo-n%E1vody.pdf>

## Seznam obrázků

Obrázek 2.1 - Exploze (vlevo) a Imploze (vpravo).....	13
Obrázek 2.2 - Sférická nálož, rozložení při oblastí při vnitřním problému .....	13
Obrázek 2.3 - Sférická nálož, rozložení při oblastí při vnějším problému.....	16
Obrázek 2.4 - Jednotlivé etapy při chemickém výbuchu .....	17
Obrázek 2.5 - Graf jednotlivých etap výbuchu .....	18
Obrázek 2.6 - Pulsování výbuchových plynů pod vodní hladinou .....	18
Obrázek 2.7 - Závislost tlakových napětí na poměrné objemové deformaci, .....	20
Obrázek 2.8 - Schéma průchodu podélné vlny .....	21
Obrázek 2.9 - Profil výbuchové vlny v pevném tělese (závislost napětí - vzdálenost): profil v oboru I. stabilního rázu, II. nestabilního rázu, III. plastickém, IV. pružném.....	22
Obrázek 3.1 - Ráz koulí u Newtonovy metody .....	25
Obrázek 3.2 - Ilustrační vyobrazení Hertzovy teorie .....	28
Obrázek 3.3 - Vyobrazení situace pro řešení .....	29
Obrázek 3.4 - Prismatický nosník .....	32
Obrázek 3.5 - Zobrazení šíření vlny .....	33
Obrázek 4.1 - Diagram závislosti napětí na deformaci z tahové zkoušky [12.].....	34
Obrázek 4.2 - Aproximace diagramu, lomenou čarou pro plně plastické chování (vlevo), s uvážením zpevnění (uprostřed), po částech spojitými čarami (vpravo) .....	35
Obrázek 4.3 - Isotropní model zpevnění .....	38
Obrázek 4.4 - Kinematické model zpevnění .....	39
Obrázek 5.1 - Závislost křivky $\sigma$ - $\epsilon$ na rychlosti deformace [2.] .....	40
Obrázek 5.2 - Slitina hliníku při různých rychlostech deformace.....	41
Obrázek 6.1 - Plošný čtyřuzlový prvek .....	47
Obrázek 6.2 - Tři deformační stavy prvku - pohyb prvku jako tuhého celku .....	47
Obrázek 6.3 - Další tři deformační stavy prvku .....	48
Obrázek 6.4 - Dva deformační stavy prvku - stav přesýpacích hodin .....	48
Obrázek 6.5 - Ovlivněná oblast efektem přesýpacích hodin.....	48
Obrázek 6.6 - Přehled rozdílů mezi algoritmy v závislosti na "komplikaci" úlohy .....	49
Obrázek 6.7 - Oblast použití jednotlivých algoritmů [14.] .....	49
Obrázek 7.1 - Zkušební zařízení pro kontrolu tlakových láhví.....	50
Obrázek 7.2 - Pohled na zkušební zařízení s transparentním krytem .....	50
Obrázek 7.3 - Matematický model .....	52
Obrázek 7.4 - Lagrangeovská síť (vlevo), Eulerovská síť (vpravo) [5.].....	52

Obrázek 7.5 - Schéma modelové úlohy .....	55
Obrázek 7.6 Expanze stlačeného plynu v čase 5 ms (vlevo), 10 ms (uprostřed), 15 ms (vpravo), pohled z boku .....	56
Obrázek 7.7 - Expanze stlačeného plynu v čase 5 ms (vlevo), 10 ms (uprostřed), 15 ms (vpravo), pohled z vrchu .....	56
Obrázek 7.8 - Barevné rozlišení kontaktních párů .....	58
Obrázek 7.9 - Expanze stlačeného vzduchu v 5 ms .....	59
Obrázek 7.10 - Expanze stlačeného vzduchu v 10 ms .....	59
Obrázek 7.11 - Expanze stlačeného vzduchu v 15 ms .....	59
Obrázek 7.12 - Expanze stlačeného vzduchu v 20 ms .....	60
Obrázek 7.13 - Expanze stlačeného vzduchu v 30 ms .....	60
Obrázek 7.14- Expanze stlačeného vzduchu v 40 ms .....	60
Obrázek 7.15 - Posuvy na zkušebním zařízení v čase 38 ms .....	61
Obrázek 7.16 - Posuvy na krytu zkušebního zařízení v čase 38 ms.....	62
Obrázek 7.17 - Průběhy napětí na krytu zkušebního zařízení v čase 38 ms. ....	62
Obrázek 7.18 - Posuvy na zkušebním zařízení (bez krytu) v čase 38 ms .....	63
Obrázek 7.19 - Průběhy napětí na zkušebním zařízení (bez krytu) v čase 38 ms.....	63

## Přílohy

### 1. Aproximace korozivzdorné oceli 1.4301

Pro aproximaci křivky závislosti napětí na deformaci je využito rovnic stanovených Rambergem a Osgoodem, které mají tvar

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} + 0,002 \left( \frac{\sigma}{\sigma_{0,2}} \right)^n \quad \text{pro } \sigma \leq \sigma_{0,2},$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma - \sigma_{0,2}}{E_{0,2}} + \varepsilon_u \left( \frac{\sigma - \sigma_{0,2}}{\sigma_u - \sigma_{0,2}} \right)^m + \varepsilon_{0,2} \quad \text{pro } \sigma > \sigma_{0,2}.$$

Jednotlivé koeficienty pro korozivzdornou ocel 1.4301 mají hodnoty

$E_0$ [MPa]	$E_{0,2}$ [MPa]	$\sigma_{0,2}$ [MPa]	$\sigma_u$ [MPa]	$\varepsilon_{0,2}$ [-]	$\varepsilon_u$ [-]	$n$ [-]	$m$ [-]
190 000	20 573	327	611	0,0037	0,57	7	2,87

Za pomocí těchto koeficientů, byly dopočteny zbývající hodnoty.

Napětí [MPa]	Deformace [-]	Napětí [MPa]	Deformace [-]
10	0,00005	330	0,00387
30	0,00016	350	0,00526
50	0,00026	370	0,00832
70	0,00037	390	0,01431
90	0,00047	410	0,02439
110	0,00058	420	0,03130
130	0,00069	430	0,03965
150	0,00080	450	0,06119
170	0,00092	470	0,09005
190	0,00104	490	0,12727
210	0,00120	510	0,17386
230	0,00138	530	0,23081
250	0,00162	550	0,29911
270	0,00194	570	0,37972
290	0,00239	590	0,47361
310	0,00301	610	0,58173

## 2. Algoritmus pro výpočet jednotlivých veličin stlačeného vzduchu

### Vstupní hodnoty

$$\text{Objem láhve:} \quad \text{Vol} := 0.03 \text{m}^3 \quad t := 1000 \text{kg}$$

$$\text{Tlak v láhvi:} \quad p := 6 \text{MPa}$$

$$\text{Teplota plynu:} \quad \text{Temp} := 323 \text{K}$$

$$\text{Plynová konstanta:} \quad r := 287.1 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$\text{Měrná tepelná kapacita za stálého tlaku:} \quad c_p := 1005 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$\text{Měrná tepelná kapacita za stálého objemu:} \quad c_v := c_p - r$$

### Vypočtené hodnoty

#### Určení hustoty

$$\rho := \frac{p}{r \cdot \text{Temp}}$$

$$\rho = 6.47 \times 10^{-11} \cdot \frac{t}{\text{mm}^3}$$

#### Hmotnost nestlačeného plynu plynu:

$$m_{\text{air}} := \rho_{\text{air}} \cdot \text{Vol} = 0.039 \text{kg}$$

#### Hmotnost stlačeného plynu plynu:

$$m_1 := \rho \cdot \text{Vol} = 1.941 \text{kg}$$

#### Určení vnitřní energie

$$U := m_1 \cdot c_v \cdot \text{Temp}$$

$$U = 4.501 \times 10^5 \text{J}$$

$$U = 4.501 \times 10^8 \cdot t \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{s}^2}$$

Ve výsledném řešení teplota plynu nehraje roli, poněvadž při určování vnitřní energie, dojde k vykrácení teploty.

## **Poděkování**

*Tímto bych rád poděkoval Ing. Martinu Fuskovi, Ph.D. za odborné vedení, věnovaný čas a věcné rady, které byly cenným podkladem při vypracování této diplomové práce. Rád bych také poděkoval své rodině a přítelkyni za podporu a pochopení v době psaní této práce.*